



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

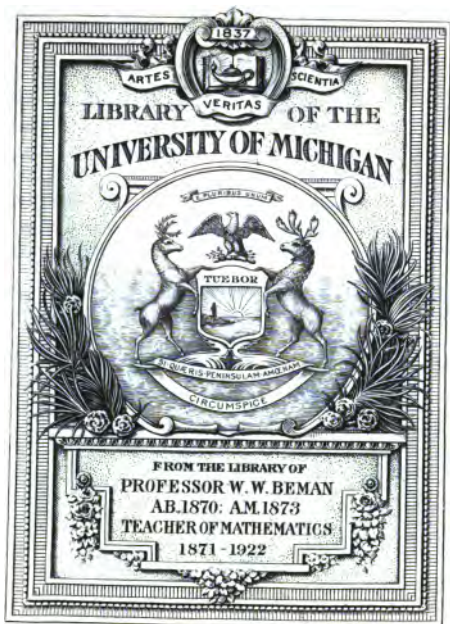
Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.



80 pf.

Einleitungen

Ausf. 3. Les-
5. Lesfungs
2. 5. Auflage.
bhandl. Theo-
litterarische
Abhandl.

n Aue,
u. Gottfr.
zhl aus dem
Marold.

elweide
und Spruch-
ter. 5. Aufl.

Luther,
Dichtungen
Pariser.

ltslied.
18. Jahrb.
Klinger.

aphie von
r. Mit 32
ff.

funde von **Dr. A. Mann.**
Mit 8 Vollbildern.

17 Aufsatz-Entwürfe
v. Prof. Dr. L. W. Straub. 2. Aufl.

18 Menschliche Körper, der.
D. Realschuldir. Rehmann mit Gesund-
heitslehre von Dr. Seiler. Mit 48 Ab-
bildungen. 2. Aufl.

19 Römische Geschichte
von Gymn.-Rektor Dr. Bender.

20 Deutsche Grammatik und
deutschen Sprache von
Dr. ...

... und die
Poesie des
Prof. O. Güntter.

21 ~~Verweise~~ u. Römische
Mythologie v. Dr. D. Stending.

22 Althochdeutsche Litteratur
m. Grammatik, Uebersetzung u. Erläute-
rungen v. Prof. Ed. Schausffler. 2. Aufl.

29 Mineralogie v. Dr. R. Brauns,
Professor an der
Universität Gießen. Mit 130 Abb.

30 Kartentkunde v. Dir. d. nautischen
Schule G. Gelcich
u. Prof. S. Sauter. Mit gegen 100 Abbild.

31 Deutsche Litteraturge-
schichte von Max Koch, Professor
an der Universität Breslau.
2. Aufl.

Sammlung Götschen. Je in elegantem Feinwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagsbandlung, Leipzig.

- | | |
|---|--|
| <p>32 Deutsche Heldensage von Dr. O. L. Jiriczek.</p> <p>33 Deutsche Geschichte im Mittelalter von Dr. S. Kurze.</p> <p>36 Herder, Cid. Herausg. von Dr. G. Naumann.</p> <p>37 Chemie, anorganische von Dr. Jos. Klein.</p> <p>38 Chemie, organische von Dr. Jos. Klein.</p> <p>39 Zeichenschule mit 17 Tafeln in Cons., farben- und Golddruck und 200 Voll- und Tegebildern von R. Kimmich. 5. Auflage.</p> <p>40 Deutsche Poetik von Dr. R. Borinski.</p> <p>41 Geometrie von Prof. Mahler. Mit 118 zweifarb. fig.</p> <p>42 Urgeschichte der Menschheit von Dr. M. Börnes. Mit 40 Abbildgn.</p> <p>43 Geschichte des alten Morgenlandes von Prof. Dr. Fr. Hommel. Mit 6 Bildern und 1 Karte.</p> <p>44 Die Pflanze, ihr Bau u. ihr Leben von Dr. W. Deunert. Mit 96 Abbildungen.</p> <p>45 Römische Altertumskunde von Dr. Leo Bloch. Mit 7 Vollbildern.</p> | <p>46 Das Waltharilied im Ver-
maße der Urschrift übersezt u. verl. v.
Prof. Dr. B. Althof.</p> <p>47 Arithmetik u. Algebra von Prof. Dr. B. Schubert.</p> <p>48 Beispielsammlung zur „Arithmetik u. Algebra“ von Prof. Dr. B. Schubert.</p> <p>49 Griechische Geschichte von Prof. Dr. B. Swoboda.</p> <p>50 Schulpraxis von Schuldirector R. Seyfert.</p> <p>51 Mathem. Formelsamm-
lung v. Prof. O. Bärkten. Mit 17 fig.</p> <p>52 Römische Litteraturge-
schichte von Herrn. Joachim.</p> <p>53 Niedere Analysis von Dr. Benedikt Sporer. Mit 8 fig.</p> <p>54 Meteorologie von Dr. W. Crabert. Mit Abbild. und Karten.</p> <p>55 Das Fremdwort im Deutschen von Dr. Rud. Kleinpaul.</p> <p>56 Dtsche. Kulturgeschichte von Dr. Reinh. Günther.</p> <p>57 Perspektive v. Hans Freyberger. Mit ganz. Jk.</p> <p>58 Geometrisches Zeichnen von Hugo Becker. Mit ganzelk. Jkstr.</p> <p>59 Indogermanische Sprachwissenschaft von Prof. Dr. R. Mertens.</p> |
|---|--|

Urteile der Presse über „Sammlung Götschen“.

Die Lehrerin in Schule u. Haus: Die handlichen Büchlein, welche zur Sammlung Götschen gehören, zeichnen sich nicht nur durch ihre gediegene Ausstattung und sehr billigen Preis, sondern mehr noch durch ihren Inhalt aus. Es ist geradezu erstaunlich, welch eine Fülle von Stoff auf wenigen Seiten hier zusammengedrängt ist! Und dabei sind die Arbeiten bis in alle Einzelheiten hinein durchaus zuverlässig und stehen in Uebereinstimmung mit den neuesten Ergebnissen der Wissenschaft. Gereifere Schüler und Schülerinnen höherer Lehranstalten, sowie auch solche, die sich durch Selbststudium bilden wollen, machen wir auf diese Sammlung abermals nachdrücklich aufmerksam.

Lehrerzeitg. f. Thüringen u. Mitteldeutschland: Diese dauerhaft und elegant gebundenen kleinen Bücher mit dem sehr handlichen Format 16/11 cm. sind, wie aus obiger Aufzählung hervorgeht, für Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminare, höhere Mädchenschulen und verwandte Anstalten bestimmt. Die von berufenster Seite geschriebenen Einleitungen und Anmerkungen, die im einzelnen Band 7—10) getroffene Auswahl, nicht minder der sorgfältige, saubere Druck verdienen volle Anerkennung. Es ist ein dankenswertes Unternehmen der Verlagshandlung, in dieser wirklich schönen Ausstattung gebiegene Schulbücher auch für andere Unterrichtsgegenstände mit erscheinen zu lassen, wie die bekannte, durch den Neubearbeiter noch anschaulicher gewordene **Astronomie von Möbius**. Der Preis ist sehr gering.“

Südb. Bl. f. höh. Unterr.-Anst.: Nachdem die zwei ersten Auflagen von Nr. 10 der Götschenschen Sammlung (Nibelungen und Kudrun in Auswahl) beifällige Aufnahme und sehr raschen Absatz gefunden haben, sind Herausgeber und Verleger übereingekommen, diese Nummer in zwei Bändchen zu zerlegen: a) Der Nibelunge Nôt zc. b) Kudrun und Dietrichpen. Dadurch ist es möglich geworden, den Text zu vermehren und ihn, sowie das Wörterbuch, mit größeren Lettern zu drucken . . . Wir zweifeln nicht, daß die vorgenommene Aenderung, die gewiß den Wünschen vieler Schulmänner entgegenkommt, dieser Einleitung in das mittelhochdeutsche Schrifttum viele neue Freunde zuführen wird.

Deutsche Lehrerzeitg., Berlin: In knappster, aber doch allgemein verständlicher Form bietet uns Dr. Fraas die Geologie. Besonders aber hat uns das 14. Bändchen, welches die Psychologie und Logik enthält, ungemein angesprochen. Elsenhans versteht es, für diesen Lehrgegenstand Interesse zu erregen. Wer größere Werke nicht durchzunehmen vermag, wer halb Vergessenes auffrischen will, wer in Kürze Logik und Psychologie in den Grundzügen in leicht faßlicher Weise sich aneignen will, der greife zu diesem Büchlein. Er wird's nicht bereuen. Lessings Philotas, der bekanntlich in antikem Gewand den Geist des siebenjährigen Krieges und vor allem die Denkart Friedrichs des Großen schildert, und die Poesie des siebenjährigen Krieges sind echt patriotische und herzerfreuliche Gaben. Nach den vorliegenden Bändchen stehen wir nicht an, die ganze Sammlung aufs angelegentlichste nicht allein zum Gebrauch in höheren Schulen, sondern auch zur Selbstbelehrung zu empfehlen.“

Schwäbischer Merkur: Der bekannte Jenaer Pädagog Prof Dr. W. Rein giebt in der „Pädagogik im Grundriß“ eine nicht nur licht volle, sondern geradezu fesselnde Darstellung der praktischen und der theoretischen Pädagogik. Jedermann, der sich für Erziehungsfragen interessiert, darf man das Büchlein warm empfehlen. Nicht minder trefflich ist die Bearbeitung, welche der Marburger Germanist Rauffmann der Deutsche Mythologie gewidmet hat. Sie beruht durchaus auf den neuesten Forschungen, wie sich an nicht wenigen Stellen, z. B. in dem schönen Kapitel über Waldr, erkennen läßt.

Kleine mathematische Bibliothek

aus Sammlung Göschen.

Jedes Bändchen elegant gebunden 80 Pfennig.

Ebene Geometrie mit 115 zweifarbigen Figuren von
Prof. G. Mahler. Nr. 41.

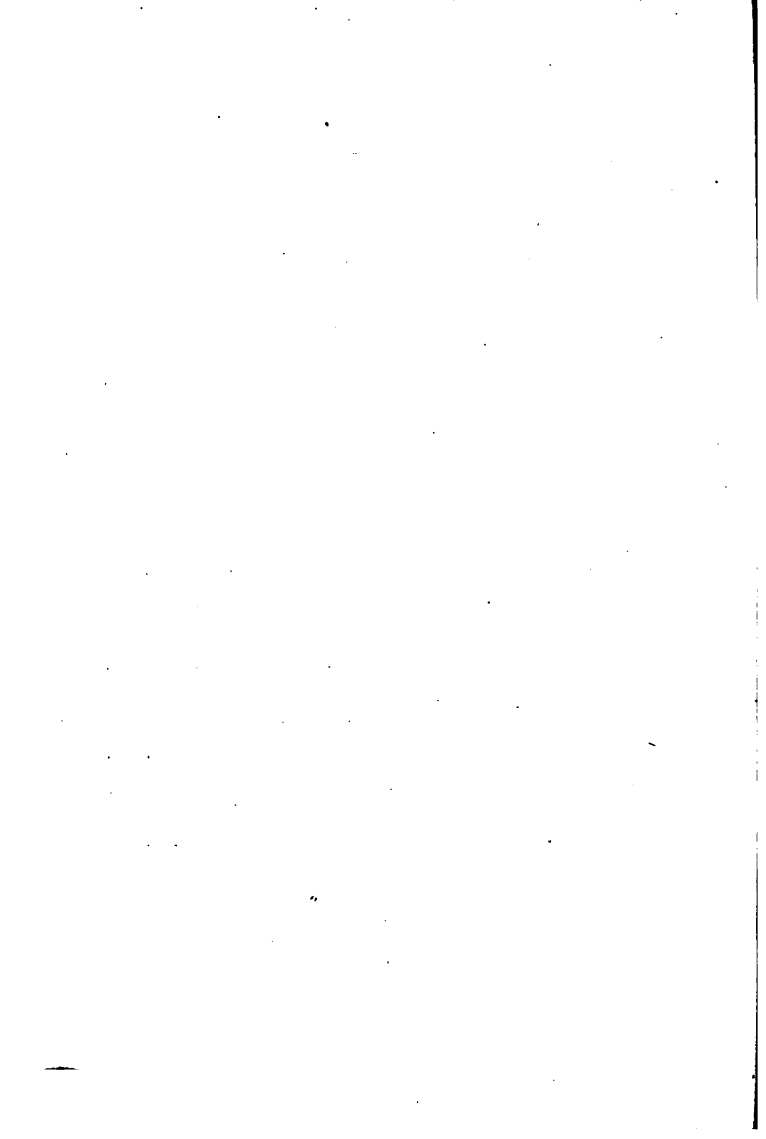
Arithmetik und Algebra von Professor Dr. Hermann
Schubert. Nr. 47.

Beispiel-Sammlung zur Arithmetik und Algebra
von Professor Dr. Hermann Schubert. Nr. 48.

Formelsammlung u. Repetitorium der Mathematik
mit 20 Figuren von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 51.

Niedere Analysis mit 6 Figuren von Dr. Benedikt Sporer.
Nr. 53.

Geometrisches Zeichnen mit 282 Figuren von Architekt
H. Becker. Nr. 58.



Sammlung Göschen

Beispiel-Sammlung

zur

Arithmetik und Algebra

von

Cäsar Hannibal

Dr. Hermann Schubert

Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg

2765 Aufgaben, systematisch geordnet

Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1896



W. W. Bernau

gt.
6-19-1923

Das Recht der Uebersetzung vorbehalten.

Druck von Carl Rembold in Heilbronn a. N.

Holzfreies Papier aus der Gust. Schaeuffelen'schen Papierfabrik
in Heilbronn a. N.

09.10.23 5.11.

Inhalt.

	Seite
I. Abschnitt. Uebergang vom Rechnen zur Arithmetik	7
§ 1. Arithmetische Bezeichnungen	7
§ 2. Die drei Klammerregeln	9
§ 3. Bedeutung des Buchstabens in der Arithmetik	10
II. Abschnitt. Rechnungsarten erster Stufe	12
§ 4. Zählen, Zahl und Addition	12
§ 5. Subtraktion	13
§ 6. Regeln für die erste Stufe	14
§ 7. Null und negative Zahlen	16
III. Abschnitt. Rechnungsarten zweiter Stufe	17
§ 8. Multiplikation	17
§ 9. Division	20
§ 10. Regeln für die zweite Stufe	22
§ 11. Gebrochene Zahlen	26
IV. Abschnitt. Anwendungen der Rechnungsarten erster und zweiter Stufe	28
§ 12. Entwickeln und Vereinfachen	28
§ 13. Proportionen	31
§ 14. Eigenschaften der natürlichen Zahlen, Zahl- systeme	34
§ 15. Dezimalbrüche	37
§ 16. Gleichungen ersten Grades mit einer Un- bekannten	39
§ 17. Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten	53

	Seite
V. Abschnitt. Quadratisches	64
§ 18. Quadrieren und Quadratwurzel-Ausziehung	64
§ 19. Irrationale Zahlen	67
§ 20. Imaginäre Zahlen	71
§ 21. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten	73
§ 22. Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten	86
VI. Abschnitt. Rechnungsarten dritter Stufe . . .	95
§ 23. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten .	95
§ 24. Wurzeln	98
§ 25. Potenzen mit gebrochenen und irrationalen Exponenten	102
§ 26. Logarithmen	104
VII. Abschnitt. Anhang	108
§ 27. Bemerkungen zum systematischen Aufbau der Arithmetik	108
§ 28. Arithmetische und geometrische Reihen .	108
§ 29. Zinseszins- und Rentenrechnung	114
§ 30. Der binomische Lehrsatz	118
§ 31. Das Moivresche Theorem	120
§ 32. Kubische Gleichungen	120
Ausgewählte Resultate	124

I. Abschnitt.

Uebergang vom Rechnen zur Arithmetik.

§ 1. Arithmetische Bezeichnungen.

Schreibe in arithmetischen Zeichen:

- 1) die Summe, deren Summanden 8 und 7 sind;
- 2) das Produkt, dessen Faktoren 3 und 6 sind;
- 3) die Differenz, deren Minuendus 7 und deren Subtrahendus 5 ist;
- 4) die Differenz, deren Subtrahendus 8 und deren Minuendus 13 ist;
- 5) den Quotienten, dessen Dividendus 24 und dessen Divisor 8 ist;
- 6) den Quotienten, dessen Divisor 24 und dessen Dividendus 72 ist.

Lies und berechne:

- 7) $4 + 9$; 8) $13 - 11$; 9) $20 \cdot 3$; 10) $20 : 4$; 11) $37 + 26$;
- 12) $24 : 12$; 13) $28 \cdot 3$; 14) $28 - 3$; 15) $60 + 5$; 16) $60 - 5$;
- 17) $60 \cdot 5$; 18) $60 : 5$; 19) $24 \cdot 8$; 20) $24 : 8$; 21) $1024 : 32$.

Es soll arithmetisch ausgedrückt werden, dass

- 22) durch Zusammenzählen von 7 und 13 die Zahl 20 entsteht;
- 23) durch Vermehrung von 7 um 3 sich 10 ergibt;
- 24) durch Hinzufügung von 3 zu 7 die Zahl 10 resultiert;
- 25) 10 entsteht, wenn man 7 um 3 wachsen lässt;
- 26) der Unterschied zwischen 10 und 7 3 ist;

27) die Zahl 10, vermindert um die Zahl 7, die Zahl 3 ergibt;

28) die Verminderung von 25 um 16 die Zahl 9 liefert;

29) das 6fache von 5 die Zahl 30 giebt;

30) das 5fache von 7 die Zahl 35 liefert;

31) der 4. Teil von 28 7 ist;

32) 4 entsteht, wenn man 12 in drei gleiche Teile teilt;

33) die Vermehrung von 7 um 8 dasselbe giebt wie die Verdreifachung von 5;

34) die Verminderung von 20 um 11 dasselbe ergibt wie die Vermehrung von 6 um 3;

35) der 8. Teil von 24 gleich dem 5. Teile von 15 ist;

36) die Hälfte von 8 gleich der um 4 verminderten Zahl 8 ist;

37) das Doppelte von 20 gleich der Hälfte von 80 ist.

38) 13 kleiner ist als 15;

39) 14 grösser ist als das Produkt der Zahlen 3 und 4;

40) man zu 94 noch etwas hinzufügen müsste, um das 8fache von 12 zu erhalten;

41) die Zahl 50 das Produkt von 7 und 7 übertrifft;

42) durch Summierung von 15 und 8 mehr herauskommt als durch Teilung von 66 durch 3;

43) der 3. Teil von 18 nicht soviel ergibt, als wenn man 20 um 13 vermindert;

44) der Quotient, dessen Dividendus 100 und dessen Divisor 4 ist, ebenso gross wie der Unterschied von 30 und 5 und wie das 5fache von 5;

45) die Summe von 23 und 25 kleiner als 7 mal 7, letzteres aber wieder kleiner ist als 5 mal 10;

46) 13 zwischen 2 mal 6 und der Hälfte von 30 liegt.

§ 2. Die drei Klammerregeln.

Schreibe und berechne:

- 1) 13 vermehrt um die Summe von 3 und 4;
- 2) die Summe von 13 und 3, vermehrt um 4;
- 3) 100 vermindert um die Summe von 30 und 60;
- 4) die Differenz von 100 und 30, vermehrt um 60;
- 5) das Produkt von 4 und 6, multipliziert mit 3;
- 6) 4 multipliziert mit dem Produkte aus 6 und 3;
- 7) das Produkt von 4 und 6, geteilt durch 8;
- 8) der Quotient von 24 und 8, geteilt durch 3;
- 9) 24 vermindert um das Produkt von 4 und 5;
- 10) die Differenz von 24 und 4, multipliziert mit 5;
- 11) die Hälfte der Summe von 13 und 19;
- 12) die Differenz zwischen 10 und dem 6. Teile von 18;
- 13) den Ausdruck, der entsteht, wenn man von der Summe von 10 und 11 das Produkt von 4 und 5 subtrahiert;
- 14) die Summe von 8 mal 4 und 3, vermindert um den Unterschied von 13 und 6;
- 15) 256 geteilt durch 4, den erhaltenen Quotienten vermindert um das 7fache von 9;
- 16) 70 vermindert um das Produkt von 7 und 8, und die erhaltene Differenz dann multipliziert mit 3;
- 17) die Summe aus 5 und 7 multipliziert mit dem Unterschied von 9 und 6;
- 18) das Produkt von 6 mit 8, dividiert durch die Summe von 19 und 5;
- 19) den Ausdruck, der entsteht, wenn man mit dem Quotienten von 30 und 10 in 27 dividiert, und mit dem erhaltenen Quotienten noch in 99 dividiert;
- 20) 20 vermindert um die Differenz von 23 und 15, und die dann erhaltene Differenz durch die Summe von 4 und 2 geteilt.

Berechne:

- 21) $5+6+3$; 22) $5+(6+3)$; 23) $5+6-3$; 24) $5+(6-3)$;
 25) $12-7+2$; 26) $12-(7+2)$; 27) $12-7-2$; 28) $12-(7-2)$;
 29) $8 \cdot 9 : 4$; 30) $7 \cdot (6 : 3)$; 31) $24 : 6 : 2$; 32) $24 : (6 : 2)$;
 33) $4 \cdot 6 + 3$; 34) $4 \cdot (6 + 3)$; 35) $3 + 4 \cdot 6$; 36) $(3 + 4) \cdot 6$;
 37) $(8-6) \cdot 5$; 38) $20-8:2$; 39) $(20-8):2$; 40) $16+16:8$;
 41) $30+2 \cdot 5+8$; 42) $(30+2) \cdot 5+8$; 43) $(30+2 \cdot 5)+8$;
 44) $30+2 \cdot (5+8)$; 45) $(30+2)(5+8)$; 46) $30+(2 \cdot 5+8)$;
 47) $40-8:4 \cdot 2$; 48) $40-8:(4 \cdot 2)$; 49) $(40-8):(4 \cdot 2)$;
 50) $32-(9+7):2$; 51) $[(32-9)+7]:2$; 52) $4 \cdot 5 \cdot 6 : 3+5$;
 53) $4 \cdot 5 \cdot 6 : (3+5)$; 54) $(1+2+3+4):5$; 55) $(8 \cdot 9 : 12) \cdot 5 : 6$;
 56) $(3 \cdot 17 + 4) : (5 + 2 \cdot 3)$; 57) $[(4 + 29) \cdot 2 + 4] : 35$;
 58) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 : (8 \cdot 9 \cdot 10)$; 59) $2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7$;
 60) $[(2+3) \cdot 4 - 5] \cdot 6 - 6 \cdot 7$; 61) $48 : (2+4 \cdot 4+6) - (5+7) : 4$;
 62) $[(3+9)8+4] : 20-3+7$; 63) $\{[(9+7)(8-3)+4] : 7+3\} : 5$;
 64) $[(20-5) \cdot 4 - 4] : [80 - (10 + 6 \cdot 7)]$;
 65) $100 - \{80 - [4 + (20 - 3)] : 7\}$;
 66) $[(4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 8 \cdot 20) \cdot 3 + 20 : 4] : (3 + 2)$;
 67) $[(1000 : 5 : 5 : 5 - 7) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 19) : 11 + 11] : 37$;
 68) $\{[(4 + 16) \cdot 5 - 20] + 11\} : (6 + 7) + 3\} : (2 \cdot 5)$.

§ 3. Bedeutung des Buchstabens in der Arithmetik.

- 1) Schreibe die Summe von a und b.
- 2) Bilde den Ausdruck, der angiebt, um wieviel a grösser ist als b.
- 3) Schreibe die Differenz von 3a und 4b.
- 4) Bilde das Produkt von p und q.
- 5) Schreibe den pten Teil von q.
- 6) Wie schreibt man die Zahl, die auf die Zahl a in der natürlichen Zahlenreihe folgt?
- 7) Drücke das 5fache von a + b arithmetisch aus.
- 8) Drücke arithmetisch aus, das a um das Produkt

von b und c vermehrt werden soll und die erhaltene Summe durch d dividiert werden soll.

9) Drücke arithmetisch aus, dass die um 3 verminderte Zahl a mit der um b vermehrten Zahl 7 multipliziert werden soll.

10) Drücke arithmetisch aus, dass a vermindert um $b - c$ dasselbe giebt, wie $a - b$ vermehrt um c .

Berechne die folgenden Ausdrücke für $a = 33$:

11) $2a - (a + 5) + (a + 49)$; 12) $(a + 7)(a - 3) + a$; 13) $[(a - 13) : (4a - 122)](a - 3)$; 14) $(10 + 2a) : (a - 14) \cdot (a + 17)$.

Berechne die folgenden Ausdrücke für $a = 9, b = 7$:

15) $a \cdot a - b \cdot b$; 16) $(a + b)(a - b)$; 17) $aa - 2ab + bb$; 18) $(a - b)(a - b)$; 19) $aaa - bbb$; 20) $(aa + ab + bb)(a - b)$.

Berechne die folgenden Ausdrücke für $p = 10, q = 8, s = 5$:

21) $(pq - s) : s$; 22) $(p + q + 2s) : (q - 1) - (s - 2)$; 23) $p[q - (q - s)]$; 24) $(p + q - s)(p + q + s) + ss$;

Berechne die folgenden Ausdrücke für $a = 30, b = 20, c = 12$:

25) $(3ac + bc) : c$; 26) $(ac + bc + a + b) : (a + 1)$; 27) $(aa - bb + 2bc - cc) : (a + b - c)$; 28) $(a + 6)(b + 4) : (cc)$.

Entscheide, ob die folgenden Gleichungen oder Ungleichungen für $x = 5$ richtig werden:

29) $4x + 1 = 3(x + 2)$; 30) $20 - (x - 1) = 21 - x$; 31) $4(x + 2x + 1) > (x + 2)(x + 4)$; 32) $x < (4x + 5) : x$; 33) $8 - (x - 1) = 8 - x - 1$; 34) $5(x + 1) > 5x + 1$.

Entscheide durch Probieren, ob die folgenden Gleichungen identische oder Bestimmungsgleichungen sind:

35) $x \cdot x + 12 = 7x$; 36) $(x + y)(x - y) = x \cdot x - y \cdot y$; 37) $(a + b + c)(a - b) = ac - bc$; 38) $a(b + c - d) = ab + ac - ad$.

Wie heissen die folgenden Formeln in Worten:

- 39) $a - (b - c) = a - b + c$; 40) $(a + b) : m = a : m + b : m$;
 41) $a \cdot v - b \cdot v = (a - b)v$; 42) $a : (b \cdot c) = a : b \cdot c$.

II. Abschnitt.

Rechnungsarten erster Stufe.

§ 4. Zählen, Zahl und Addition.

Was folgt aus:

- 1) $\begin{cases} a = b \\ c = b \end{cases}$; 2) $\begin{cases} a = b \\ c = d \\ a = c \end{cases}$; 3) $\begin{cases} a > b \\ b = c \end{cases}$; 4) $\begin{cases} a = p \\ p < q \end{cases}$;
 5) $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases}$; 6) $\begin{cases} a < v \\ v = w \end{cases}$; 7) $\begin{cases} p < q \\ q < t \end{cases}$; 8) $\begin{cases} a \text{ kgr} = b \text{ kgr} \\ b = c \end{cases}$;
 9) $\begin{cases} a \text{ M.} > b \text{ M.} \\ c < b \end{cases}$?

Lies umgekehrt:

- 10) $13 = x$, 11) $a > b$; 12) $p < q$; 13) $v \text{ cm} > w \text{ cm}$.

Berechne a) vor, b) nach Auflösung der Klammern:

- 14) $4 + (6 + 7)$; 15) $7 + [8 + (9 + 10)]$; 16) $25 + (13 + 19 + 43)$.

Wende das Vertauschungsgesetz oder das Verbindungsgesetz oder beide Gesetze an, um auf bequemste Weise zu berechnen:

- 17) $25 + (4 + 75)$; 18) $97 + 11 + 3$; 19) $23 + 44 + 77$;
 20) $13 + 14 + 15 + 16 + 17$; 21) $44 + [9 + (6 + 41) + 100]$.

Löse in den folgenden Ausdrücken die Klammern:

- 22) $p + (q + v)$; 23) $a + (b + c + d)$; 24) $a + [5 + (b + c)]$.
 25) $e + (f + g) + [h + (i + k)]$; 26) $a + \{b + [c + (d + e)]\}$;

27) Um wieviel wächst eine Summe, wenn der eine Summand um 7, der andere um 3 wächst?

Berechne für $a=7$, $b=8$, $c=9$, $d=10$ die folgenden Ausdrücke a) vor, b) nach Auflösung der Klammern:

28) $a+(b+a)$; 29) $b+c+(a+d)$; 30) $a+b+(b+c+d+a)$;
31) $a+[a+(a+b+c)]$; 32) $a+(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)$.

Führe die angedeuteten Additionen aus und löse die dabei entstehenden Klammern:

33) $a=b$ 34) $a=12$ 35) $a=b+c$
 $c=f$ (add.) $b=c+d$ (add.) $d+e=19$ (add.)
36) $x > 12+a$ 37) $e=13$ 38) $a+b > c+d$
 $y=4$ (add.) $f < g+h$ (add.) $e+f+g > h$ (add.)

Vereinfache möglichst:

39) $3a+9a$; 40) $7x+23x$; 41) $4(a+b)+5(a+b)$;
42) $9x+10x+11x$; 43) $4a+(3a+7a+5a)+a$;
44) $4a+2a+3b$; 45) $9x+7x+8y+8y$;
46) $7a+3b+3a+7b$; 47) $9p+(3p+4q)+5q$;
48) $37m+(8p+q)+p+(3m+9q)$; 49) $a+[b+(a+b)]$;
50) $3x+(4y+9z)+(7x+8y)+(9x+z)$;
51) $9a+[3b+(c+d+a)]+(a+4b+7c)+(c+5d)$.

§ 5. Subtraktion.

1) Wie heisst die Zahl, die um b grösser ist, als $a-b$?

2) Was muss man für x setzen, damit $x+a=s$ richtig wird?

Vereinfache mit Benutzung des Begriffs der Subtraktion:

3) $v-w+w$; 4) $p+q-q$; 5) $v+w+z-z-w$;
6) $20+(a+c)-(a+c)$; 7) $5a+3b-3b-3c+3c$;
8) $x-(7a+3b)+(3b+7a)$; 9) $a-3b+(b+b+b)$.

Vereinfache möglichst:

10) $5a - 3a$; 11) $19v - 11v$; 12) $3a + 7a - 5a$;

13) $9c + 3c - 5c + c$; 14) $5a + 7b + 8a - 6b$;

15) $10v + [7w + (3v + w)] - 3v$.

16) Welche Ungleichung muss bestehen, damit $v - w$ Sinn hat?

Führe die angedeuteten Subtraktionen aus:

17) $a = b$

18) $a = b + c$

19) $a = 7b$

$x = 5$ (subtr.)

$d = c$ (subtr.)

$c = 3b$ subtr.)

Löse die folgenden Gleichungen durch alleinige Anwendung der Transpositionsregel erster Stufe:

20) $x + 18 = 23$; 21) $x + 20 = 29$; 22) $19 + x = 24$;

23) $4 - x = 2$; 24) $23 = x + 13$; 25) $100 = 92 + x$;

26) $343 = 843 - x$; 27) $x + c = d$; 28) $x - e = f$;

29) $a = x - b$; 30) $x - 7 - 8 = 5$; 31) $x + 7 + 8 = 20$;

32) $x + 13 - 5 + 18 - 7 = 20$; 33) $x - a + b - c - d = e$;

34) $25 - (x + 4) = 19$; 35) $25 - (x - 4) = 19$; 36) $40 = 10 + (x - 11)$;

37) $43 - (43 - x) - 4 = 5$; 38) $100 = 1000 - [500 + (401 - x)]$.

§ 6. Regeln für die erste Stufe.

Berechne a) vor, b) nach Auflösung der Klammern:

1) $19 - (9 + 3)$; 2) $100 - (43 + 3)$; 3) $80 - (30 + 5 + 15)$;

4) $103 + (7 + 8 - 13)$; 5) $103 - (7 + 8 - 13)$; 6) $20 - (19 - 5 - 6)$;

7) $98 + (17 - 5) - (23 - 5)$; 8) $20 + (48 + 2 + 10) - (13 + 17)$;

9) $720 + [42 - (7 + 9)]$; 10) $400 - (50 + 60) - [70 + (17 - 7)]$;

11) $17 + (23 + 300 - 20) - [24 + 16 - (19 + 1)] - (42 + 8)$;

12) $100 + 50 - [124 - (7 - 3) - (20 - 9 - 1)] + (11 + 19)$.

Löse die vorkommenden Klammern und berechne dann durch Vereinigung der hinter Pluszeichen stehenden Zahlen einerseits und

der hinter Minuszeichen stehenden Zahlen andererseits:

- 13) $7+13-5+8-2+43-5-7+19-16$; 14) $25-(23-16)+49$;
 15) $27+(30-16)-(47-8-9)+(49+7-8)-(24-4)$;
 16) $203-15-[42-(23+17)+(48-19-9)-18]$.

Löse die Klammern in den Ausdrücken:

- 17) $p-(a-b-c)$; 18) $p+(v-w+s)$; 19) $p-(q-v)+(a-b-c)$;
 20) $a+b-[c-(d+e)]$; 21) $20-(v+w)+(a+b-c-d)$.

Vereinfache durch Vereinigung der abgekürzt geschriebenen Summen:

- 22) $5a+8a-3a+10a$; 23) $17b-3b-5b-8b$;
 24) $4a+3b-2b+5b$; 25) $4a+3b+19a-26b$;
 26) $17m-4p+13m-12p-8p$;
 27) $3x+4y-2z-x+9y+11z-13y-10z+7x+8y$;
 28) $41u-42v+43w-7u-8v+19u-16w+u$.

Löse die Klammern und vereinige dann:

- 29) $17a-(7a-b)$; 30) $25p-(3q+10p)$; 31) $19a+(a-3b)$;
 32) $100-(5a+7)-(2a-72)$; 33) $23a-(b-c+a)+(3b+c)$;
 34) $14a-18-(6a-7)+(5a-1)-(20a-19)+(5-a)-(a+1)$;
 35) $a+2b-[3c-(a-b)+(5a-6b-c)-(7a-3b+4c)]$.

Schliesse die drei letzten Glieder in eine Klammer ein, vor der ein Pluszeichen oder ein Minuszeichen steht, je nachdem das drittletzte Glied ein Pluszeichen oder ein Minuszeichen vor sich hat:

- 36) $3a+b-c+d$; 37) $3p+q-a+b+c$; 38) $a-b-c-2d$;
 39) $A-B-2C-3D+4E$; 40) $100-p+2q-w$.

Ändere auf alle mögliche Weise die Reihenfolge der auf das erste Glied folgenden Glieder:

- 41) $p-a+b-c$; 42) $p+2a-b+c$; 43) $p-a-b-c+d$.

Vermindere bei den folgenden Differenzen Minuendus und Subtrahendus so, dass der letztere die Zahl 1 wird:

- 44) $25-17$; 45) $48-47$; 46) $1000-501$; 47) $(a+b)-(a+1)$.

Vereinfache die folgenden Ausdrücke nach Einsetzung von $a=x+2y-z$, $b=4x-y+z$, $c=3x-5y-z$:

48) $a+b+c$; 49) $a-b+c$; 50) $a-b-c$; 51) $b+c-a$.

Löse in den folgenden Gleichungen zuerst die Klammern und berechne dann x :

52) $39-(x+6)=26$; 53) $46-(x-6)=42$;

54) $100-(20-x)=99$; 55) $7a+(x-b)=8a$;

56) $19p-(x+8p+q)=p+q$; 57) $70-[60-(50-x)]=40$.

Führe die angedeuteten Subtraktionen aus:

58) $a=b$ 59) $e=f$ 60) $11 > 10$

$c < d$ (subtr.) $9 > 8$ (subtr.) $p = q$ (subtr.)

61) $\alpha + \beta + 8 = 180^\circ$

62) $a > b$

$\alpha > 90^\circ$ (subtr.)

$7 < 5$ (subtr.)

63) $a < p + q$

$b > q$ (subtr.)

§ 7. Null und negative Zahlen.

Welche Zeichen setzt man für die Differenzformen:

1) $5-5$; 2) $a-a$; 3) $5-8$; 4) $39-46$; 5) $a-(a+b)$?

Berechne:

6) $7+0$; 7) $81-0$; 8) $0-9$; 9) $(+4)+(+6)$;

10) $(-4)+(-6)$; 11) $(-4)+(+6)$; 12) $(+4)+(-6)$;

13) $(+4)-(+6)$; 14) $(+4)-(-6)$; 15) $(-4)-(-6)$;

16) $(-4)-(+6)$; 17) $(-5)+(-7)+(-8)+(-10)-0$;

18) $19-(-5)+(-7)-(-9)$; 19) $23+(-5)-8+(-20)-(+11)$;

20) $-200-(-19)-19+(-200)$; 21) $a-(-19)-(-11)+(-30)$.

Führe die angedeuteten Additionen aus:

22) $+5$ 23) -19 24) $+73$ 25) $+100$

-6 -21 -27 $+20$

-7 -10 $+54$ $+60$

$+8$ (add.) $+49$ (add.) -0 (add.) -99 (add.)

Berechne die folgenden Ausdrücke für $a = -1$, $b = +7$, $c = 0$, $d = -5$:

26) $a - b - c + d$; 27) $-a + b + c + d$; 28) $a + b - c - d$.

Löse die Gleichungen:

29) $17 - (16 - x) = 1$; 30) $-(x + 18) = 19$;

31) $-100 = 20 + (x - 25)$.

Führe die folgenden Schlüsse aus:

32) $a = a$ 33) $a > b$ 34) $23 > 21$
 $-7 = -7$ (subtr.) $0 > -5$ (add.) $-3 < -2$ (subtr.)

35) $a = b$ 36) $a < b$ 37) $-5 < x - 5$
 $-7 > -8$ (subtr.) $a = c$ (subtr.) $+5 = +5$ (add.)

III. Abschnitt.

Rechnungsarten zweiter Stufe.

§ 8. Multiplikation.

Drücke kürzer aus:

1) $4 + 4 + 4 + 4 + 4$; 2) $a + a + a + a$; 3) $0 + 0 + 0 + 0$;

4) $(-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3)$; 5) $(a+b) + (a+b) + (a+b)$.

Verwandle in ein Produkt:

6) $7a + 8a$; 7) $73m - 13m$; 8) $ap + bp$; 9) $ap - bp$;

10) $ab + ac$; 11) $ab - ac$; 12) $a \cdot 7 + a \cdot 8$; 13) $139.94 + 139.6$;

14) $4a + 4b - 4c$; 15) $15e - 15f - 15g + 15h$; 16) $3a + 3$;

17) $9a - 9b - 9$; 18) $ap - aq + as$; 19) $ap - aq + a$.

Löse die Klammern:

20) $(a+b)m$; 21) $(a-b)s$; 22) $(7+v)w$; 23) $(7-v)w$;

24) $m(a+b)$; 25) $s(a-b)$; 26) $w(7+v)$; 27) $w(7-v)$;

28) $m(a-b+c+d)$; 29) $(e-f-g-h+k)w$;

30) $(4-a+b-c+d) \cdot 5$; 31) $4(a-25+b-c)$.

Führe die folgenden Schlüsse aus (die Buchstaben bedeuten positive Zahlen):

- | | | |
|--|--|--|
| 32) $a = b$
<u>$e = f$ (mult.)</u> | 33) $5 > 4$
<u>$p = q$ (mult.)</u> | 34) $a < b$
<u>$c = d$ (mult.)</u> |
| 35) $a < b$
<u>$c < d$ (mult.)</u> | 36) $a = a$
<u>$b < c$ (mult.)</u> | 37) $7 > 6$
<u>$a > b$ (mult.)</u> |

Berechne:

- 38)** $0.8 - 7$; **39)** $9.0 + 50$; **40)** $(a - a) \cdot 5$; **41)** $(a - a)(b - b)$;
42) $(-3) \cdot 5$; **43)** $[a - (a + 2)] \cdot 9$; **44)** $6 \cdot (-7)$;
45) $(-8) \cdot (-5)$; **46)** $0 \cdot (-8)$; **47)** $(-19) \cdot (a - a)$;
48) $3.0 - 5 \cdot (-6) + (-7)(-8)$; **49)** $(-1)(-4) - (-5)(-6)$;
50) $(7 - 9) \cdot 2 - (8 - 20) \cdot 5 - 16(0 - 1)$; **51)** $(-3)(-3)(-3)$;
52) $(-1)(-1)(-1)(-1)$; **53)** $1.2.3.0 - 4.0.5.6 - (-1) \cdot 7$;
54) $(-3) \cdot [-5 \cdot 2 + (-5) \cdot 2 - (-5)(-2)]$;
55) $(-1896) \cdot (-1723) \cdot (b - b)$.

Berechne auf kürzeste Weise:

- 56)** $4 \cdot (a \cdot 25)$; **57)** $5 \cdot 39 \cdot 20$; **58)** $(125a)(8b)$;
59) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4$.

Löse die Klammern und vereinfache:

- 60)** $6(2a - b - c) + 4(a + b + c)$; **61)** $4(9a - 2b + c) - 6(a - 2b - c)$;
62) $16(3a - 2b) - 5(9a - 7b) - 3(a - 4b) - 11b$;
63) $3(2x - y + z) - 5(x + y - z) + 2(x + 4y - 4z)$;
64) $5 \cdot [3(a + 2b - c) + 4(a - b - c)] - 19(a - b - c)$;
65) $2 \cdot 3 \cdot p + 4 \cdot 5 \cdot q - 6(p - 2q) - 3 \cdot 4(p + q) + 12p$;
66) $13e - 7f + 8g - (e + f + g) \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6(2e + f) + 4(f + h)$;
67) $a(b - c + d) - b(a + c - d) + c(a + b - d)$;
68) $4a(b - 3) - 5b(a - 7) + ab + 7(a - b)$;
69) $3 \cdot 6 \cdot a(b - c) - 2b(9a - c) - 2c(b - 9c)$;
70) $p[q(s + t) - st] - s(pq - 1) + t(4 - pq) + pst$.

Verwandle in eine Summe von möglichst wenig Produkten:

- 71)** $(a + b)(e + f)$; **72)** $(a - b)(e + f)$; **73)** $(a - b)(e - f)$;
74) $(2a - 5b)(d + e)$; **75)** $(a + b)(4c - 7d)$; **76)** $(3a - c)(b + 2d)$;
77) $(21a - b)(3c + 2d)$; **78)** $(3a - 10b)(4a - 5b)$;
79) $(3a - b + c)(x + y)$; **80)** $(2a - b - c)(x - 2y)$;

- 81) $(7e + 3f - 2g)(p + q)$; 82) $(2a - 3b)(5e - 6f + 7g)$;
 83) $(3a - 2b + c)(x + 3y)$; 84) $(a - b + c)(x + y + z)$;
 85) $(a + b - 2c)(p - 2q + 3s)$; 86) $(4a - 5b + c)(2d - 3e - 4f)$;
 87) $(2a - b)(c + 3d) + (a - 4b)(-2c + d)$;
 88) $(3a - 4b)(2c - d) - (a + 5b)(c + d) - (5a - b)(c + d)$;
 89) $(a - b)(2p - 3q) + (2a - 3b)(p + q) - (4a - b)(p - q)$.

Sondere den gemeinsamen Faktor ab:

- 90) $7a - 7b - 7c$; 91) $15a - 10b + 5c$; 92) $20a + 16b - 28c$;
 93) $ax - ay + az$; 94) $(3b)(4a) - (3b)(5c) + (3b)(7d)$;
 95) $12ab - 20ac + 16ad$; 96) $(3a - b)(c - d) - (2a - b)(c - d)$;

Verwandle in ein einziges Produkt:

- 97) $ac - ad + bc - bd$; 98) $4ab + 4ac - bd - cd$;
 99) $9a + 9b - ca - cb$; 100) $3a + 3 - pa - p$;
 101) $13ab + 13ac - 4vb - 4vc$; 102) $5ab - 3b + 5ac - 3c$;
 103) $5aq - 3q + 10av - 6v$; 104) $1 - ap - bp - aq - bq$;
 105) $2ab + 2ac - 2ad + 7mb + 7mc - 7md$;
 106) $3av + 4v - 3aw - 4w + 15a + 20$;
 107) $ad - ae + af - bd + be - bf + cd - ce + cf$.

Vereinfache:

- 108) $(4a)(5b)(8c)(125d)$; 109) $[3ab(cd)(5ef)](2g)$.

Berechne:

- 110) 2^3 ; 111) 3^2 ; 112) 2^7 ; 113) 10^6 ; 114) 4^4 ; 115) 0^6 ;
 116) $4^2 \cdot 5^3$; 117) $4^2 - 3^2$; 118) $16 \cdot 5^4 \cdot 3^2$;
 119) $10^3 + 8 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 6$; 120) $10^3 + (-10)^3$;
 121) $(-1)^{16}$; 122) $(+2)^{12} - (-2)^{12}$.

Löse die Klammern und vereinfache möglichst:

- 123) $4p^2(5p - q)$; 124) $3a^2b^2(a^2 + b^2)$; 125) $3ab(a + b + c)$;
 126) $3a^2b^2(a^2 - 2ab + b^2) - ab^3(3ab - 6a^2)$;
 127) $13p^2q(4p^2 - 3q^2) - 4q(13p^4 - q^4)$;
 128) $(a + b)^2$; 129) $(a - b)^2$; 130) $(a + b)(a - b)$;
 131) $(a^2 + b^2)^2$; 132) $(a^2 - b^2)^2$; 133) $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$;
 134) $(c^4 - c^2)(c^3 + c)$; 135) $(e^5 - e^2 + e^4)(e^3 + e - e^2)$;

- 136) $(x-5)^2$; 137) $(y+3)^2 - (y-3)^2$; 138) $(2v+3w)^2$;
 139) $(7p^2-3q^2)(4p^2+q^2)$; 140) $3a^2-ab+b^2(a^2+3ab-b^2)$.

Sondere den gemeinsamen Faktor ab:

- 141) $a^5b^2 - a^4b + a^3b^4$; 142) $15a^3b + 30a^2b + 15ab$;
 143) $3m^3n^3p^2 - 6m^2n^3p^3 + 15m^3n^3p^2$;
 144) $20a^4b^3c^4 + 16a^3b^5c^3 - 24a^5b^2c^4 + 4a^3b^2c^6$.

Löse die Klammern und vereinfache:

- 145) $(a+b)(a+b)(a+b)$; 146) $(a-b)(a-b)(a-b)$;
 147) $(a+b+c)(a+b+c)$; 148) $(a-b-c)(a+b+c)$;
 149) $(p-w)(p^2+pw+w^2)$; 150) $(x^3-x^2+x-1)(x+1)$;
 151) $(v+w)(v^3-v^2w+vw^2-w^3)$; 152) $(a+b+c)^3$;
 153) $(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2+z^2) - (x^2-y^2+z^2)(x^2-y^2-z^2)$.

Berechne:

- 154) $(-4)^4 + (-2)^8 + 2 \cdot (-10)^3 + (-3)(-2)^4$;
 155) $(-4)(-5)(-6)^2 : (-2^4) \cdot 3^2(-5)$;
 156) $(-2^3) \cdot (-5^2) \cdot (-5)^2 \cdot (-2)^3 + (0-3)^4 + (-2)^9$.

§ 9. Division.

Berechne:

- 1) 18 kgr : 2 kgr; 2) 18 kgr : 2; 3) 40 Stunden : 2 Stunden;
 4) 40 Stunden : 2; 5) 110 Volt : 20 Volt; 6) 110 Volt : 20;
 7) 90 Pferde : 18; 8) 14 Mark : 7 Pfennige;
 9) 1 Stunde : 12 Sekunden.

10) $\frac{(b+c+d+e)a}{a}$; 11) $\frac{1896}{79} \cdot 79$; 12) $\frac{19p^2q}{a^3b} \cdot a^3b$.

- 13) 14 kgr kosten 7 Mark. Wieviel kosten 22 kgr?
 14) a Liter kosten 6 Mark. Wieviel kosten a' Liter?
 15) a Arbeiter leisten eine Arbeit in b Tagen. In wieviel Tagen a' Arbeiter?
 16) Für k Mark Kapital bekommt man z Mark Zinsen. Wieviel Mark Zinsen für f Mark Kapital?

Vereinfache:

17) $(a:m + b:m) \cdot m$; 18) $a + \frac{a+b}{x}x + \frac{b+c}{y}y + \frac{c}{w} \cdot w$;

19) $(a+v-w)b:(a+v-w)$; 20) $(ab)(cd)(ef):(def)$;

21) $\left(\frac{4a+b}{m} - \frac{3a-2b}{m} - \frac{3b}{m}\right)m$; 22) $\left(a + \frac{e}{f}\right)f$;

23) $a - \left(\frac{a}{p} - \frac{b}{p}\right) \cdot p$; 24) $pq + pv - \left(\frac{p(q+v)}{m} \cdot m - a\right)$.

25) $\frac{-16}{+4} - \frac{+15}{-3}$; 26) $\frac{-20}{-5} + \frac{-36}{+9} - \frac{+64}{-8}$;

27) $\frac{(-8)(-9)}{(-6)(-3)} - \frac{(-9)(-10)(-12)}{(-15)(+4)} - \frac{(-20)(+18)}{-(2 \cdot 3 + 4)(-9)}$;

28) $\frac{0}{9} - \frac{(-5)(-4)}{-10} + \frac{0}{20}$; 29) $\frac{a-a}{15} - \frac{b-b}{20}$;

30) $\frac{0-5}{-5} - \frac{0 \cdot 4 \cdot 8}{16} + \frac{(5b-5b) \cdot 7}{1896} - \frac{0 \cdot 0 \cdot 0}{-19}$;

31) $\frac{a-a}{0}$; 32) $\frac{(3x-6) \cdot 5}{2x-4}$ für $x=2$; 33) $\frac{3 \cdot 8 \cdot 10 - 15 \cdot 16}{4 \cdot 9 - 6 \cdot 6}$;

34) $\frac{x^{11}}{x^7}$; 35) $(a^8 - a^7):a^5$; 36) $p^4 \cdot p^3 \cdot p^2:(p^5 \cdot p)$;

37) $(a^7 b^8 c^9 + a^6 b^7 c^8 - 3a^5 b^6 c^7):a^5 b^6 c^7$.

Löse die folgenden Gleichungen durch die Transpositionsregel zweiter Stufe:

38) $\frac{x}{6} = 7$; 39) $\frac{x}{a} = b$; 40) $x:(a+b) = m$; 41) $72 = 4x$;

42) $20x = 160a$; 43) $4p = vx$; 44) $(a+b)x = c$;

45) $\frac{81}{x} = 27$; 46) $\frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{x} = 9$; 47) $20 = \frac{400}{x}$.

48) $5x - 7 = 13$; 49) $39 = 8x - 1$; 50) $(4 + 3x) \cdot 5 = 35$;

51) $\frac{3-x}{2} = 1$; 52) $\frac{7+8x}{13} = 3$; 53) $\frac{24-9x}{6} = 1$;

54) $\frac{-8}{x} = 2$; 55) $\frac{3x-5}{-8} = 1$; 56) $(0-x):(-10) = 2$.

§ 10. Regeln für die zweite Stufe.

Berechne nach Lösung der Klammern:

- 1) $72:(4:2)$; 2) $72:(4 \cdot 2)$; 3) $72:(4:2)$; 4) $50:(10:5)$;
 5) $(20+8):4$; 6) $(20-8):4$; 7) $20 \cdot 16:(80 \cdot 2)$;
 8) $(256-128+64-32):16$; 9) $(128+64-32):(-16)$;
 10) $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6:(8:2 \cdot 5:2)$; 11) $16 \cdot 5^2:[50:(10:2)]$.

Verwandle in einen Quotienten, dessen Dividendus und dessen Divisor ein Produkt ist, und berechne dann:

- 12) $8 \cdot 9 \cdot 10:(4 \cdot 5 \cdot 6)$; 13) $\frac{7 \cdot 9 \cdot 16}{18} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$; 14) $\frac{999}{37} \cdot \frac{72}{3^2} \frac{5^3}{5}$;
 15) $\frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 10}$; 16) $(-1)(-2)(-3)(-4):(-8)$;
 17) $\frac{9 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 21}{6 \cdot 10 \cdot 42}$; 18) $\frac{(-1)^5 \cdot (-2)^4 \cdot (-3)^3}{(-6)^3}$.

Vereinfache:

- 19) $\frac{(5m)n}{v \cdot w} \cdot v$; 20) $\frac{32pq}{8abc} \cdot (4ac)$; 21) $\frac{25p^2q^2}{4v^2} \cdot (w^2v^2)$;
 22) $\frac{20ab}{(5m)(25p)} \cdot (5c)$; 23) $a^3b^3c^3 \cdot \frac{d \cdot e}{a^2b^2c^2}$; 24) $\frac{a^5}{b^6} \cdot b^8$;
 25) $(125abc):(5a):(5b):(5c)$; 26) $72p^6q^7:(9p^4q):(8pq^6)$;
 27) $\left(\frac{4a^3}{p^2} - \frac{b^3}{p^2} + \frac{c^3}{p^2}\right)p^3$; 28) $\frac{5pqr}{8efg} \cdot \frac{4e}{5p} \cdot \frac{2f}{q} \cdot \frac{g}{r}$;
 29) $\frac{8a(b-c)}{d+e} \cdot \frac{d+e}{b-c}$; 30) $\frac{(a+b)^3}{c+d} \cdot \frac{e+f}{(a+b)^2} \cdot \frac{c+d}{e+f}$;
 31) $ab:\frac{ab}{cd}$; 32) $\frac{9pq}{4m}:\frac{3p}{2m}$; 33) $\frac{27a^3b^3}{8e^2f^2}:\frac{9a^2b^2}{4e^2f^2}$.

Die folgenden Quotienten sollen gehoben werden:

- 34) $\frac{16a}{24b}$; 35) $\frac{abcde}{4cde}$; 36) $\frac{5a^4b^3c^2}{4a^3b^2c}$; 37) $\frac{a(b+c)}{m(b+c)}$;

$$\begin{aligned}
 38) & \frac{3a+3b}{m(a+b)}; & 39) & \frac{(x-y)cd}{xe-ye}; & 40) & \frac{10a-10b}{5m}; & 41) & \frac{(a-b)^2}{ac-bc}; \\
 42) & \frac{ae-af+ag}{be-bf+bg}; & 43) & \frac{(c^2+cd)m}{(c+d)^2}; & 44) & \frac{18a^4b^2-27a^6}{10b^2-15a^2}; \\
 45) & \frac{3ab+3ac-fb-fc}{30a-10f}; & 46) & \frac{ac-ad+bc-bd}{pc-pd+qc-qd}.
 \end{aligned}$$

Führe die angedeuteten Divisionen aus und vereinfache möglichst:

$$\begin{aligned}
 47) & \frac{7a-7b+7c}{7}; & 48) & \frac{26a-39b+52c}{13}; & 49) & \frac{14a-7b+7}{7}; \\
 50) & \frac{a+b-c}{m}; & 51) & \frac{3ab-ac+ad}{a}; & 52) & \frac{12a-14b+16c-18d}{2m}; \\
 53) & \frac{4ab+5ac-6ad}{a} - \frac{3bc+6bd}{b}; & 54) & \frac{8a+12b}{4} - \frac{10a-5b}{5}; \\
 55) & \frac{8a^3-5a^2b+9a^2c}{a^2} - \frac{4b^3-b^2c}{b^2} + \frac{ac+bc}{c}; \\
 56) & \frac{4a^2-b^2}{ab}; & 57) & \frac{apq-3bpq+cpq}{apq}; \\
 58) & a + \frac{28pq-35pv+42ps}{7p}; & 59) & p - \frac{5p-5q}{5}; \\
 60) & 43a - \frac{m(a+b)+20m(2a-b)}{m}; & 61) & 4a-b - \frac{8aq-2bq}{2q}; \\
 62) & 7a-3b-c - \frac{a^2-ab+ac}{a} - \frac{ab-b^2+bc}{b} + \frac{5ac+4bc+3c^2}{2c}.
 \end{aligned}$$

Fasse die Quotienten von gleichem Divisor zusammen:

$$\begin{aligned}
 63) & \frac{3a}{7} - \frac{2a}{7} + \frac{9a}{7} + \frac{4a}{7}; & 64) & \frac{7a}{m} + \frac{a}{m} - \frac{4a}{m}; \\
 65) & \frac{3a-b}{c} + \frac{b}{c} - \frac{2a}{c}; & 66) & \frac{3ab-2cd}{e} + \frac{2ab+2cd}{e}; \\
 67) & \frac{2a}{9} - \frac{2a-b-c}{9}; & 68) & \frac{2x+y}{3} + \frac{x+2y}{3};
 \end{aligned}$$

$$69) \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}; \quad 70) \frac{3p-q}{2p-q} + \frac{p-q}{2p-q};$$

$$71) \frac{2a-b}{a+b} - \frac{3a+2b}{a+b} + \frac{4a+5b}{a+b} + \frac{2a+3b}{a+b};$$

$$72) \frac{a+b}{m} + \frac{4a-b}{m} + \frac{3a-b}{c} - \frac{3a-2b}{c};$$

$$73) \frac{7p-9}{p+1} - \frac{2q+1}{q+1} - \frac{p-15}{p+1} + \frac{3q+2}{q+1}.$$

Bringe auf gleichen Divisor und fasse dann zusammen:

$$74) \frac{a}{b} + \frac{c}{d}; \quad 75) \frac{a}{pq} - \frac{b}{pr}; \quad 76) \frac{2cd}{ab} - \frac{c}{a};$$

$$77) \frac{cde}{x^2y} - \frac{ab}{xy}; \quad 78) \frac{a}{pq} - \frac{b}{pr} + \frac{c}{qr}; \quad 79) a - \frac{b}{c};$$

$$80) x + \frac{x-y}{2}; \quad 81) x - \frac{x-y}{2}; \quad 82) a - b + \frac{a+7b}{3};$$

$$83) \frac{a-2b}{5} - \frac{2a-5b}{3}; \quad 84) \frac{e+f}{4} + \frac{e-f}{2};$$

$$85) \frac{2a+b-c}{3} - \frac{a-b+c}{6};$$

$$86) \frac{7a-b-c}{4} + \frac{2a-b+5c}{6} - \frac{a-5b+7c}{12};$$

$$87) \frac{a-b}{15} + \frac{b}{4} - \frac{2a-3b}{10} + \frac{4a-b}{12} - \frac{2a-b}{6};$$

$$88) \frac{p^2+q^2}{p-q} - (p-q); \quad 89) \frac{(p-q)^2}{4pq} + \frac{(p+q)^2}{4pq} - \frac{p}{2q} - \frac{q}{2p};$$

$$90) \frac{3q}{p} - \frac{p^2+q^2}{pq} + \frac{p^2r+q^2r-r}{pqr};$$

$$91) \frac{2a+1}{a+1} - \frac{3a-1}{a-1} + \frac{a(a+3)}{a^2-1};$$

$$92) \frac{a^2+b^2}{a-b} + \frac{4ab-b^2}{3a-4b} - \frac{a^2-b^2}{a+2b}.$$

Wende das allgemeine Divisions-Verfahren an, um die folgenden Ausdrücke zu vereinfachen:

$$93) \frac{7a-14}{a-2}; 94) \frac{ac-bc}{a-b}; 95) \frac{a^2-ab}{a-b}; 96) \frac{15ac-20bc}{3a-4b};$$

$$97) \frac{av+a+bv+b}{a+b}; 98) \frac{21ax-35ay+3bx-5by}{3x-5y};$$

$$99) \frac{30ap-6bp+12cp}{5a-b+2c}; 100) \frac{av-2a+5v-10}{v-2};$$

$$101) \frac{20ac-15ad-12bc+9bd}{5a-3b}; 102) \frac{3abd-3cd+abc-c^2}{ab-c};$$

$$103) \frac{a^2-8a+15}{a-3}; 104) \frac{a^2-a-12}{a-4}; 105) \frac{a^2-b^2}{a-b};$$

$$106) \frac{a^3-16b^2+ac-4bc}{a-4b}; 107) \frac{a^3+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{a+b+c};$$

$$108) \frac{p^2+q^2+r^2+2pq-2pr-2qr}{p+q-r}; 109) \frac{p^2+2pq+q^2-r^2}{p+q+r};$$

$$110) \frac{4a^2-4a+1}{2a-1}; 111) \frac{12a^2-4b^2-5c^2+2ab+4ac-9bc}{2a-b-c};$$

$$112) \frac{p^3-q^3}{p-q}; 113) \frac{p^3+q^3}{p+q}; 114) \frac{a^3+8b^3}{a+2b}; 115) \frac{27a^3-8b^3}{3a-2b};$$

$$116) (6m^2+3mn-2m-3n^2-2n):(m+n);$$

$$117) (15x^4+7x^3+15x^2+7x+4):(3x^2+2x+1);$$

$$118) (1-18a^2+81a^4):(1-6a+9a^2);$$

$$119) (-2x^4+7x^3+82x^2+145x+72):(9+8x-x^2);$$

$$120) (216a^3+125):(36a^2-30a+25);$$

$$121) (1-32p^5):(1+2p+4p^2+8p^3+16p^4);$$

$$122) (128a^4b^3-160a^5b^2+2a^6b+15a^7):(3a^2-8ab).$$

§ 11. Gebrochene Zahlen.

Berechne:

1) $\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{9}\right) \cdot \frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$; 3) $\left(7 + \frac{5}{8}\right) \cdot \frac{8}{61}$;

4) $\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{10}$; 5) $16 - \left(4 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{6} + 12\right)$;

6) $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{9}\right)$; 7) $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{14} + \frac{5}{42}\right)$;

8) $\frac{4}{3} : \frac{4}{9}$; 9) $\frac{2}{5} : \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right)$; 10) $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} : \frac{5}{12} : 5$;

11) $16 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : 64$; 12) $20 : \left(\frac{9}{11} + \frac{13}{33}\right)$;

13) $13 : \left(4 + \frac{1}{3}\right) + 31 : \left(5 + \frac{1}{6}\right) - 57 : \left(7 + \frac{1}{8}\right)$;

14) $(3 \cdot 17 - 1) \cdot \frac{7}{10} - 8 : \frac{1}{4} - 1 : \frac{1}{3}$;

15) $\frac{4}{-\frac{1}{9}} - \frac{5}{-\frac{5}{6}} - \frac{7}{-\frac{14}{15}}$.

Vereinfache:

16) $\left(\frac{4}{9}a - \frac{1}{3}b\right) : (4a - 3b)$; 17) $17a \cdot \frac{b}{a} - (3b - a)$;

18) $\left[\frac{4}{5}x - \frac{2}{3}y - \left(\frac{7}{15}x - \frac{1}{6}y\right)\right] : a\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y\right)$;

19) $\frac{3}{4ab} - \frac{5}{2ac} + \frac{6}{bc}$;

20) $\frac{\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y}{5} - \frac{\frac{1}{5}x - \frac{1}{6}y}{3} + \frac{8x - y}{15}$;

21) $\left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{5}b\right)\left(\frac{4}{9}a - \frac{10}{21}b\right)$; 22) $\left(\frac{1}{3}a - \frac{2}{5}x\right)^2$;

$$23) \left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{5}b\right) \left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{5}b\right); \quad 24) \left(\frac{2}{3}p - \frac{3}{4}q\right)^3.$$

Wende das allgemeine Divisions-Verfahren an:

$$25) \left(\frac{8}{5}a^2b - \frac{1}{2}ac^2 + \frac{8}{5}ab^2 - \frac{1}{2}bc^2\right) : (a + b);$$

$$26) \left(\frac{3}{4}pq - \frac{1}{2}p - \frac{9}{4}q + \frac{3}{2}\right) : \left(\frac{3}{2}q - 1\right);$$

$$27) \left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{a}{5} - \frac{1}{10}\right); \quad 28) \left(\frac{1}{8}p^3 + q^3\right) : \left(\frac{1}{2}p + q\right);$$

$$29) \left(\frac{16}{81}a^4 - b^4\right) : \left(\frac{2}{3}a - b\right);$$

$$30) \left(\frac{125}{8}a^3 + \frac{1}{27}b^3\right) : \left(\frac{5}{2}a + \frac{1}{3}b\right);$$

$$31) 11 \frac{1}{5} \cdot 2 \frac{2}{13} - 1 \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8}; \quad 32) \left(3 \frac{3}{4}\right)^2 - 14;$$

$$33) \left(3 \frac{3}{5}ab - 5 \frac{1}{3}ac\right) : (27b - 40c).$$

Bestimme Quotient und Rest bei:

$$34) (8a^3 - 20a^2 + 4a - 3) : (4a^2 - 3);$$

$$35) (7a^2 - 5ab + b^2) : (7a - b);$$

$$36) \left(3 \frac{3}{4}a^2 - b^2\right) : (15a - b);$$

$$37) \left(32a^5 - \frac{9}{2}a^3b^2 - 7b^5\right) : \left(4a^2 - 2ab + \frac{2}{3}b^2\right).$$

Welchen Wert hat:

$$38) \frac{7}{a-a}; \quad 39) \frac{15}{\infty}; \quad 40) \frac{7}{0} + 15; \quad 41) \frac{13}{x} \text{ für } x=0;$$

$$42) \frac{47}{2x-6} \text{ für } x=3; \quad 43) \infty - \infty; \quad 44) 7 \cdot \infty + \frac{4}{0} - 5?$$

Löse die Gleichungen durch die Transpositionsregeln:

$$45) 4x - \frac{1}{5} = 3; \quad 46) 5\left(\frac{3}{8} - \frac{x}{4}\right) = 1 : \frac{8}{5};$$

$$47) \frac{\frac{1}{2}}{x-5} + \frac{5}{9} = 1 \frac{1}{18}; \quad 48) 9 - \left[3 - \left(\frac{1}{2} - 2x\right)\right] + 2 \frac{3}{5}.$$

IV. Abschnitt.

Anwendungen der Rechnungsarten erster und zweiter Stufe.

§ 12. Entwickeln und Vereinfachen.

Löse die Klammern mit Anwendung der Formeln:

- 1) $(c+d)^2$; 2) $(e-f)^2$; 3) $(a-1)^2$; 4) $(2x+1)^2$;
 5) $(3a-2)^2$; 6) $(5e+3f)^2$; 7) $\left(p-\frac{1}{2}\right)^2$; 8) $\left(3v+\frac{1}{3}w\right)^2$;
 9) $\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{5}\right)^2$; 10) $(g+h)^2$; 11) $(p-q)^2$; 12) $(3x+y)^2$;
 13) $(4p-q)^2$; 14) $(2a+3b)^2$; 15) $\left(1\frac{1}{4}a-2\right)^2$;
 16) $(2ab-1)^2$; 17) $\left(1-\frac{1}{3}v\right)^2$; 18) $(2a+3b)(2a-3b)$;
 19) $\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{1}{2}\right)$; 20) $\left(\frac{4}{3}v+\frac{3}{4}w\right)\left(\frac{4}{3}v-\frac{3}{4}w\right)$;
 21) $(a-1)(a^2+a+1)$; 22) $(p+2)(p^2-2p+4)$;
 23) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$; 24) $(3a+b)(9a^2-3ab+b^2)$;
 25) $(a+2)(a^3-2a^2+4a-8)$;
 26) $(2x-y)(8x^3+4x^2y+2xy^2+y^3)$;
 27) $(p+1)(p^4-p^3+p^2-p+1)$.

Vereinfache die Quotienten mit Benutzung der Umwandlungsformeln:

$$28) \frac{p^2 + 2pq + q^2}{5(p+q)}; \quad 29) \frac{5a - 5b}{a^2 - 2ab + b^2}; \quad 30) \frac{p^2 - q^2}{p+q};$$

$$31) \frac{a^3 - 1}{a-1}; \quad 32) \frac{a^3 + 8}{a+2}; \quad 33) \frac{16 - p^4}{2 - p}; \quad 34) \frac{9x^2 + 6x + 1}{9x^2 - 1};$$

$$35) \frac{4a^2 - \frac{9}{16}b^2}{2a - \frac{3}{4}b}; \quad 36) \frac{125a^3 - 1}{5a - 1}; \quad 37) \frac{a^3b^3c^3 + d^3}{abc + d};$$

$$38) \frac{1 + a^3}{1 - a + a^2}; \quad 39) \frac{a^2 - 9b^2}{a^2 - 6ab + 9b^2}; \quad 40) \frac{x^5 + 1}{x^2 - 1};$$

$$41) \frac{a^3 - b^3}{90} \cdot \frac{18}{a-b}; \quad 42) \frac{\frac{3}{4}a^2 - \frac{4}{3}b^2}{3a - 4b};$$

$$43) \frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{a+b+c}; \quad 44) \frac{p^2q - pq}{p^2 - 1}; \quad 45) \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^3 + b^3};$$

$$46) \frac{a^3 - b^3}{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}; \quad 47) \frac{p^3 - 3p^2 + 3p - 1}{p^3 - p};$$

$$48) \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}; \quad 49) \frac{a^2 - 2ab + b^2 - 16c^2}{a - b + 4c};$$

Verwandle in ein Produkt von zwei oder mehr Faktoren:

$$50) p^2 - q^2; \quad 51) p^3 - q^3; \quad 52) p^3 + q^3; \quad 53) p^4 - q^4;$$

$$54) a^5 + b^5; \quad 55) 9a^2 - 4b^2; \quad 56) x^4 - 16y^4; \quad 57) 27p^3 + 1;$$

$$58) 9p^2 + 6pq + q^2; \quad 59) 8a^3 + 12a^2 + 6a + 1;$$

$$60) \frac{16}{81}a^4 - b^4; \quad 61) a^3 - b^3 - c^3 - 3b^2c - 3bc^2;$$

$$62) a^4 + 2a^2 + 1; \quad 63) a^6 - 2a^3b^3 + b^6; \quad 64) p^4q^4 - s^4t^4.$$

Verwandle in einen einzigen Quotienten:

$$65) \frac{1}{c+d} + \frac{1}{c-d} + \frac{2d}{c^2 - d^2}; \quad 66) \frac{ab}{3a+b} - \frac{3a}{3a-b};$$

$$67) \frac{2a+1}{9a^2-9} - \frac{1}{5a+5} - \frac{1}{3a-3}; \quad 68) \frac{x}{2x-1} + \frac{x-2x^2}{4x^2-1} - 1;$$

$$69) \frac{a^2}{a^3-b^3} + \frac{1}{a-b} - \frac{a}{a^2+ab+b^2};$$

$$70) \frac{p^3}{p^4-q^4} - \frac{p}{p^2+q^2} + \frac{1}{p-q}.$$

Entwickele in eine klammerlose algebraische Summe:

$$71) (p+q+r)^2; \quad 72) (p+q-r)^2; \quad 73) (a+b+c+d)^2;$$

$$74) (a-b+c-d)^2; \quad 75) (a+b+c)^3; \quad 76) (a+b-c)^3;$$

$$77) (a+b)^4; \quad 78) (a+b)^5; \quad 79) (a+b)^6; \quad 80) (2a-1)^5;$$

$$81) (3a-b+c)^3; \quad 82) \left(\frac{1}{3}a-b-c\right)^3; \quad 83) (2a-3b)^4.$$

Berechne nach dem Muster von

$$78^2 = (78+2)(78-2) + 2^2 = 80 \cdot 76 + 4 = 6084:$$

$$84) 98^2; \quad 85) 103^2; \quad 86) 52^2; \quad 87) 71^2; \quad 88) 69^2; \quad 89) 33^2;$$

$$90) 204^2; \quad 91) 497^2; \quad 92) 805^2; \quad 93) 991^2; \quad 94) 1024^2.$$

Entwickele:

$$95) (3a-2b+c)(4a-b-c) - (2a-b-c)(6a-2b+c);$$

$$96) (a+b)^2 + (a-b)^2 - 2(a^2+b^2);$$

$$97) (a-b)^3 + (a+b)^3 - 6ab^2; \quad 98) (a-1)(a-2)(a-3);$$

$$99) \frac{(a+b)^2 - c^2}{a+b-c} - \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{a+b+c};$$

$$100) (a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (-a+b+c)^2;$$

$$101) (a+b+c)^3 - (a+b-c)^3; \quad 102) (e+f)^4 + (e-f)^4.$$

Bringe auf die Hauptform:

$$103) \frac{v+w}{4} - \frac{6v+3w}{12} + \frac{4w+v}{4}; \quad 104) 1 - \frac{a-2b}{a+2b};$$

$$105) \left(\frac{3v}{2} - w - \frac{6w^2}{v}\right) \left(\frac{v}{2} + \frac{w}{3} - \frac{2w^2}{v}\right);$$

$$106) \frac{(ab+cd)^2 + (ac-bd)^2}{(ad+bc)^2 + (ad-bc)^2} \cdot \frac{2(a^2d^2 + b^2c^2)}{(a^2+d^2)(b^2+c^2)};$$

$$107) \frac{3ab - 3cd}{a + b} : \frac{ab - cd}{a - b}; \quad 108) \frac{3e - 4f}{e} - \frac{3e + f}{f};$$

$$109) \left(\frac{3}{5}a - \frac{2}{3}b \right) \left(\frac{5}{3}a + \frac{3}{2}b \right);$$

$$110) \left[\frac{3a - b}{6} - \frac{5a - 3b}{12} \right] : (a + b);$$

$$111) \frac{3e + 5}{6e - 9} - \frac{2e^2 + 5e - 1}{4e^2 - 9};$$

$$112) \frac{9a^2 - 24ab + 16b^2}{3a + 4b} : \frac{3a - 4b}{3a + 4b};$$

$$113) \frac{1}{p^2 + q^2} + \frac{1}{(p + q)^2} + \frac{1}{(p - q)^2} + \frac{1}{p^2 - q^2};$$

$$114) \frac{a - \frac{25b^2}{a}}{1 + \frac{5b}{a}}; \quad 115) \frac{\frac{1}{p - q} + \frac{1}{p + q}}{\frac{1}{p - q} + \frac{1}{p + q}};$$

$$116) \frac{6 - \frac{23}{2}p^2 + \frac{1}{6}p^4}{3 + \frac{9}{2}p + \frac{1}{2}p^2}.$$

§ 13. Proportionen.

Gieb je 7 Proportionen an, die dasselbe aussagen wie:

$$1) 4:6=14:21; \quad 2) 72:108=22:33; \quad 3) 9\frac{1}{2}:6\frac{1}{3}=9:6.$$

Bilde je 8 Proportionen aus den Produkt-Gleichheiten:

$$4) 15 \cdot 6 = 9 \cdot 10; \quad 5) 3\frac{3}{4} \cdot 8 = 2 \cdot 15; \quad 6) (-9) \cdot (-4) = 7\frac{1}{5} \cdot 5.$$

Berechne x aus den Proportionen:

$$7) 180:x=72:75; \quad 8) 4\frac{1}{2}:5=5:x; \quad 9) x:9=392:441;$$

$$10) 3\frac{1}{2}:49=x:50; \quad 11) \frac{5}{8}:\frac{25}{26}=\frac{13}{15}:x;$$

$$12) \frac{5}{11}:2\frac{1}{22}=x:3; \quad 13) 3a:x=b:\frac{1}{9}c; \quad 14) 3ab:c=x:\frac{5}{3}c;$$

$$15) 6ab:7cd=b^2x:c^2d; \quad 16) \frac{3a}{4b}:x=\frac{9a}{8b}:\frac{3}{16};$$

$$17) \frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{x}{1}; \quad 18) \frac{x}{a+b}=\frac{a-b}{ab};$$

$$19) \frac{a^3+b^3}{x}=\frac{a^2-ab+b^2}{a+b}; \quad 20) (-8a):(+3\frac{1}{5}b)=5a:x.$$

Berechne zuerst das x enthaltende Glied und darauf x selbst:

$$21) \frac{15}{8}:(x+7)=1:8; \quad 22) \frac{2x+3}{5}:7=\frac{1}{3}:2\frac{1}{3};$$

$$23) \frac{4}{x-\frac{1}{8}}:1=1\frac{7}{9}:\frac{5}{6};$$

$$24) \frac{a+b}{3}:\frac{1}{3}=\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right):\frac{b^2-ab+b^2}{x}.$$

Drücke die folgenden Verhältnisse durch möglichst kleine ganze Zahlen aus:

$$25) 432:400; \quad 26) 4\frac{1}{6}:100; \quad 27) \frac{1}{4}:\frac{2}{3}; \quad 28) \frac{8}{9}:\frac{9}{10};$$

$$29) 1:\frac{24}{25}; \quad 30) 13\frac{1}{3}:5\frac{5}{7}; \quad 31) 302\frac{1}{2}:3\frac{7}{16}.$$

Drücke die folgenden Proportionen durch möglichst kleine ganze Zahlen aus, ohne das Glied a zu ändern:

$$32) 48:63=a:168; \quad 33) a:42=48:49;$$

$$34) 205 : 8 \frac{1}{5} = 12 \frac{1}{2} : a.$$

Wie heisst die vierte Proportionale zu:

$$35) 3, 4, 6; 36) 9, 10, 45; 37) 7, 8, 9; 38) 3 \frac{1}{2}, 7, 8;$$

$$39) -1, -2, -3?$$

Bilde zwei stetige Proportionen aus:

$$40) a^2 = ef; 41) x^2 = 4.9; 42) x^2 = 6.24;$$

$$43) \frac{125}{3} \cdot \frac{1}{15} = x^2.$$

Gieb zwei von 1 verschiedene ganze Zahlen an, zwischen denen die folgende Zahl mittlere Proportionale ist:

$$44) 6; 45) 14; 46) 21; 47) 10; 48) 55; 49) 39; 50) 34.$$

51) Zu 10 und einer zweiten Zahl ist 20 das geometrische Mittel. Wie heisst dann das arithmetische und das harmonische Mittel?

Wende die Umformung, welche $a:b=c:d$ in $(a+b):(c+d)=a:c$ verwandelt, auf die folgenden Proportionen an:

$$52) 3:4=21:28; 53) 15:20=42:56; 54) 18:6=33:11.$$

Wende die Umformung die $a:b=c:d$ in $(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$ verwandelt, auf die folgenden Proportionen an:

$$55) 24:18=20:15; 56) \frac{p+q}{2} : \frac{p-q}{2} = e:f;$$

$$57) 3 \frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 2 \frac{1}{7} : \frac{1}{7}.$$

Suche die vierte Proportionale zu:

$$58) 4m, 15m \text{ und } 16 \text{ Sekunden};$$

$$59) 14 M., 126 M., 15 \text{ Arbeiter};$$

$$60) 100 M. \text{ Kapital, } p. M. \text{ Kapital, } z. M. \text{ Zinsen};$$

$$61) a \text{ hl, } b \text{ hl, } c \text{ Pfennige}; 62) 5 \text{ Ampère, } 6 \text{ Ampère, } 100 \text{ Volt.}$$

Setze die folgenden Proportionen zusammen und hebe dabei möglichst:

$$63) \left\{ \begin{array}{l} 3:5=9:y \\ 10:12=x:15 \end{array} \right\}; 64) \left\{ \begin{array}{l} a:b=8:9 \\ b:c=15:16 \end{array} \right\}; 65) \left\{ \begin{array}{l} a:b=9:13 \\ c:d=26:27 \end{array} \right\};$$

$$66) \left\{ \begin{array}{l} p:(p+q)=5:8 \\ (p+q):q=16:6 \end{array} \right\}; 67) \left\{ \begin{array}{l} a:b=1:2 \\ b:c=2:3 \\ c:d=3:4 \end{array} \right\}; 68) \left\{ \begin{array}{l} a:b=p:9 \\ b:c=v:w \\ f:a=1:2 \end{array} \right\}.$$

Bestimme die mit $a:b:c$ beginnende fortlaufende Proportion aus folgenden Angaben;

$$69) \left\{ \begin{array}{l} a:b=3:5 \\ b:c=5:8 \end{array} \right\}; 70) \left\{ \begin{array}{l} a:b=10:11 \\ b:c=12:13 \end{array} \right\}; 71) \left\{ \begin{array}{l} a:c=3:7 \\ b:c=13:14 \end{array} \right\};$$

$$72) \left\{ \begin{array}{l} a:b=9:10 \\ b:c=15:16 \\ c:d=8:27 \end{array} \right\}; 73) \left\{ \begin{array}{l} a:c=7:8 \\ a:d=21:32 \\ b:d=15:16 \end{array} \right\}; 74) \left\{ \begin{array}{l} a:d=4:3\frac{3}{4} \\ b:d=5:2\frac{1}{7} \\ c:d=6:5 \end{array} \right\}.$$

75) Wieviel Kilogramm Salpeter, Schwefel und Kohle sind in 1000 Kilogramm Schiesspulver, wenn die in demselben vorhandenen Gewichtsteile Salpeter, Schwefel und Kohle sich wie 1000 zu 153 zu 178 verhalten?

§ 14. Eigenschaften der natürlichen Zahlen, Zahlssysteme.

- 1) Bestimme die Primzahlen, die kleiner als 100 sind.
- 2) Zerlege in Primfaktoren die durch 6 teilbaren Zahlen unter 100.

Zerlege die folgenden Zahlen in Primfaktoren:

- 3) 672; 4) 1024; 5) 8800; 6) 1896; 7) 52000; 8) 6930.

Welche Teiler hat:

- 9) 90; 10) 120; 11) 1400; 12) 875; 13) 999; 14) 486?

Wieviel Teiler hat:

- 15) $2^4 \cdot 3^5 \cdot 7^2$; 16) $3^4 \cdot 5^3 \cdot 11$; 17) 7.11.13.17; 18) $2^{10} \cdot 3^5 \cdot 19$;
 19) 1680; 20) 4400; 21) 1000000; 22) 369000; 23) 16384?

Schreibe in der Form $8n \pm v$, wo $v \overline{<} 4$ ist, die Zahlen:

- 24) 25; 25) 47; 26) 140; 27) 210; 28) 424; 29) 3003.

Entscheide, ohne die Division auszuführen, welche Reste die folgenden Zahlen bei der Division durch 4 lassen:

- 30) 4026; 31) 1896; 32) 43575; 33) 183454.

Entscheide dasselbe für die Division durch 25:

- 34) 43577; 35) 13841; 36) 134735; 37) 40675.

Mit welchen drei Ziffern muss eine durch 125 teilbare Zahl endigen?

Setze an die folgenden Zahlen eine Ziffer so an, dass die entstandene Zahl durch neun teilbar wird:

- 38) 421; 39) 743; 40) 301; 41) 4789; 42) 90476.

Bestimme den Neun-Rest der folgenden Zahlen:

- 43) 4021; 44) 47823; 45) 1896; 46) 44444; 47) 1737.

Welchen Neunrest muss man bei dem Resultate der folgenden Multiplikationen erhalten:

- 48) 431 mal 5842; 49) 743 mal 8942; 50) 7 mal 7 mal 7;
 51) 43333 mal 1999; 52) 431 mal 431 mal 431 mal 431.

Bestimme durch Faktoren-Zerlegung bei den folgenden Zahlen-Gruppen das grösste gemeinsame Mass:

- 53) 168, 576; 54) 52, 182, 1352; 55) 560, 336, 616;
 56) 700, 840, 175, 3500; 57) 1280, 3200, 1024, 576.

Bestimme durch Faktoren-Zerlegung das grösste gemeinsame Mass zu den folgenden Ausdrücken:

58) $p^2 - q^2, p^3 - q^3, p^3 - 2pq + q^3$; 59) $a^4 - b^4, a^4 - 2a^2b^2 + b^4$,

60) $(a+b+c)^2 - d^2, ae+be+ce-de$; 61) $v^5 + w^5, v^3 + w^3$.

Bestimme durch Faktoren-Zerlegung das kleinste gemeinsame Vielfache zu:

62) 28, 63, 36; 63) 400, 125, 750; 64) 14, 10, 24, 21, 30;

65) $a^4 - 1, a^2 - 1, a - 1, a + 1$; 66) $5a - 10b, 4a - 8b, a^2 - 4b^2$.

Berechne durch das Divisions-Verfahren die grösste Zahl durch welche sich die folgenden Brüche heben lassen:

67) $\frac{13068}{18144}$; 68) $\frac{4293}{7632}$; 69) $\frac{5014}{189189}$; 70) $\frac{8512}{16720}$.

Schreibe in römischen Zahlzeichen die Zahlen:

71) 173; 72) 305; 73) 350; 74) 1896; 75) 688.

Schreibe im hexadischen Ziffersystem mit den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5 die Zahlen, die im gewöhnlichen dekadischen Ziffersystem so geschrieben werden:

76) 25; 77) 43; 78) 64; 79) 96; 80) 100; 81) 216.

Schreibe dekadisch die Zahlen, die im dyadischen Ziffersystem, das nur die Ziffern 0 und 1 hat, so geschrieben werden:

82) 11; 83) 101; 84) 1001; 85) 11111; 86) 100011.

Berechne durch Auflösung einer Gleichung bei welcher Basis man die folgenden dekadisch geschriebenen Zahlen so zuschreiben hat, dass auf die Ziffer 3 die Ziffer 1 folgt.

87) 7; 88) 13; 89) 19; 90) 37.

§ 15. Dezimalbrüche.

Schreibe als Dezimalbruch:

- 1) $5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 + 7 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{100}$;
 2) $4 + 5 \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \frac{1}{100} + 8 \cdot \frac{1}{1000}$;
 3) $6 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{1}{100} + 1 \cdot \frac{1}{1000}$;
 4) $8 \cdot \frac{1}{1000} + 7 \cdot \frac{1}{10000} + 6 \cdot \frac{1}{100000}$;
 5) $35 + 8 \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \frac{1}{1000}$; 6) $4 \cdot \frac{1}{100} + 7 \cdot \frac{1}{1000000}$;
 7) $3 + 7 \cdot \frac{1}{10000}$;
 8) 47:100; 9) 903:10; 10) 7843:10⁶; 11) 5:10⁵.

Schreibe als gewöhnlichen Bruch:

- 12) 4,737; 13) 0,91785; 14) 823,7; 15) 0,041; 16) 0,0007.

Berechne:

- 17) 4,123—3,279+5,812—0,099; 18) 4,21—5,01—3,789;
 19) 7,842·5,316; 20) 0,056·9,314; 21) 0,513·0,111;
 22) 0,478·0,004+7,351·0,534; 23) (3,14)²—(1,23)²;
 24) (81,75—4,59)·13,71; 25) 19·0,056—11+5,8,12;
 26) (7—0,534)·9; 27) 19,32·5—9,87·6+5,12·7.

Erweitere jeden der folgenden Brüche so, dass der Nenner eine dekadische Stufenzahl, also der Bruch ein Dezimalbruch wird:

- 28)
- $\frac{4}{5}$
- ; 29)
- $\frac{4}{25}$
- ; 30)
- $\frac{19}{80}$
- ; 31)
- $\frac{101}{125}$
- ; 32)
- $\frac{71}{64}$
- ; 33)
- $\frac{201}{320}$
- .

Führe die folgenden Divisionen auf drei Dezimalstellen aus:

- 34)
- $\frac{5,170}{11}$
- ; 35)
- $\frac{4,137}{7}$
- ; 36)
- $\frac{182,727}{9}$
- ; 37)
- $\frac{0,0416}{13}$
- ;

$$38) \frac{4,816}{1,6}; \quad 39) \frac{104,8576}{102,4}; \quad 40) \frac{43,782}{0,002}; \quad 41) \frac{0,0056}{0,07}.$$

Berechne auf drei Dezimalstellen:

$$42) 4,712 : 5,81 - 3,12; \quad 43) (9,842 + 7,12) : 1,6;$$

$$44) 5,432 \cdot 0,084 : 7,123; \quad 45) 99,12 + 5,312 : 0,2.$$

Verwandle die folgenden Brüche in einen Dezimalbruch derartig, dass die etwaigen vorperiodischen Stellen und die Periode erkennbar werden:

$$46) \frac{2}{7}; \quad 47) \frac{4}{9}; \quad 48) \frac{5}{18}; \quad 49) \frac{34}{35}; \quad 50) \frac{30}{37}; \quad 51) \frac{8}{13};$$

$$52) \frac{1}{52}; \quad 53) \frac{7}{41}; \quad 54) \frac{81}{82}; \quad 55) \frac{151}{192}; \quad 56) \frac{2}{21}.$$

Verwandle die folgenden geschlossenen Dezimalbrüche in möglichst gehobene gemeine Brüche:

$$57) 0,125; \quad 58) 0,032; \quad 59) 6,25; \quad 60) 3,15; \quad 61) 0,0128; \quad 62) 0,0384; \quad 63) 0,475; \quad 64) 0,0032; \quad 65) 409,6.$$

Verwandle die folgenden periodischen Dezimalbrüche in möglichst gehobene gemeine Brüche und beachte beim Heben, dass $99 = 3^2 \cdot 11$; $999 = 3^3 \cdot 37$; $9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$; $99999 = 3^2 \cdot 41 \cdot 271$; $999999 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ ist:

$$66) 0,\overline{39}; \quad 67) 0,\overline{814}; \quad 68) 0,\overline{2828}; \quad 69) 2,\overline{92682};$$

$$70) 14,\overline{285714}; \quad 71) 0,\overline{04878}; \quad 72) 23,\overline{076923}; \quad 73) 0,\overline{84};$$

$$74) 0,\overline{685}; \quad 75) 1,\overline{4324}; \quad 76) 0,\overline{5834146}.$$

Berechne x aus:

$$77) 4 \frac{1}{2} : 0,9 = x : 24; \quad 78) 0,\overline{571428} : \frac{5}{7} = x : 3;$$

$$79) -1,23 : 4,1 = 9 : -x; \quad 80) x : 2,7 = \frac{1}{9} : 6,4;$$

$$81) \frac{1}{5} x - 5,23 = 4,41; \quad 82) \frac{3,6}{x} + 5,7 = 0,38 \cdot 25;$$

$$83) -0,27 + \frac{5}{x+2} = \frac{8}{11}; \quad 84) (7\frac{1}{2} - 0,8) : (x-5) = 6,7.$$

§ 16. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

A. Keine Klammern, keine Brüche.

- 1) $7x - 5 + 2x = 13$; 2) $4 + 12x = x + 15$;
 3) $34x = 6x + 5 + 51$; 4) $70 - 3x - 2x = 7x - 2$;
 5) $x = 9x + 7 - 5x - 10$; 6) $x + 2x + 3x + 4x = 100$;
 7) $-2x - 5 = 9x + 5x + 21 - 68 - 6$;
 8) $0 = 5x + 7x - 9x - 11x + 107x - 74 + x - 26$.

B. Klammern, aber keine Brüche.

- 9) $3x - (x - 7) = x + 15$; 10) $3x - (2x - 8) = 19$;
 11) $3(x + 1) - 2x = 93$; 12) $81 - 4(x + 1) = x + 7$;
 13) $103 - 3(x - 5) = 2x + 18$; 14) $13(2x - 1) = 5(5x + 4)$;
 15) $25 - 6(x - 6) = 20 - (2x - 13)$; 16) $2(9 - x) + 5(2x + 3) = 81$;
 17) $6(20 + 3x - 1) - 5(8x - 7) + 19 = 2(x - 72)$;
 18) $3 \cdot 5 \cdot (x + 6) + 5 \cdot 7 \cdot (1 + 2x) - 7 \cdot 9 \cdot (x - 8) = 827$.

C. Brüche, aber x nicht im Nenner.

- 19) $\frac{x}{6} - 4 = 10 - x$; 20) $8 - \frac{x}{9} = \frac{x+4}{3}$;
 21) $5 + \frac{x}{2} = x - 5$; 22) $\frac{x}{4} - 5 = x - 23$;
 23) $19 - \left(7 + \frac{x}{8}\right) = \frac{x}{2} + 7$; 24) $5x - 5\frac{1}{2} = 7x - 7\frac{1}{2}$;
 25) $\frac{1}{8}x + \frac{1}{6}x - 6 = 1$; 26) $\frac{7 - 3(x - 5)}{4} = 1$;
 27) $\frac{8(2 + 5x) - 5}{9} = \frac{9x + 2}{2}$; 28) $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} + \frac{x}{3} - \frac{x}{6} = 13$;
 29) $8x - \frac{x}{4} = \frac{x}{10} + 153$; 30) $\frac{7}{6}x - \frac{1}{4} - \frac{17}{18} = \frac{11}{36}(3x + 1)$;

$$31) 30(x-2) + \frac{x}{3} = \frac{5x+1}{16} + 30;$$

$$32) \frac{1}{2}(5x+1) - \frac{1}{3}(4x+5) = \frac{1}{4}(3x-1) - \frac{1}{20}(6x+4);$$

$$33) \frac{7x-5}{16} - \frac{4+4x}{8} + \frac{x+3}{6} = \frac{7}{9}(x-3);$$

$$34) \frac{3x+9}{72} + \frac{5x-33}{36} - \frac{48-x}{9} + \frac{x-17}{4} = \frac{3+x}{24};$$

$$35) \frac{x}{8} - \frac{x-2}{5} + \frac{x-22}{10} + \frac{x-12}{20} = \frac{32-x}{40};$$

$$36) \frac{3x-5}{16} - \frac{4(2x+4)}{9} - \left[\frac{9-x}{2} + \frac{x-7}{12} \right] = x-15;$$

$$37) \frac{8}{9} \cdot \frac{4-x}{11} = \frac{x}{3} - \left[\frac{16x+2}{33} - \frac{x+2}{9} \right];$$

$$38) \left[14 \frac{2}{7} + \frac{3x+1}{28} - \frac{x+5}{14} \right] \cdot 7 = 9x+19.$$

D. x im Nenner.

$$39) \frac{4}{x} = \frac{5}{x} - 1; \quad 40) \frac{1}{x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x} = 1;$$

$$41) \frac{20}{x-1} - \frac{15}{x-1} = 1; \quad 42) \frac{40}{-x} = -5;$$

$$43) \frac{42}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x} = 20 \frac{2}{3}; \quad 44) \frac{4}{5x} - \frac{7}{10x} = 0,1;$$

$$45) 7 \cdot \frac{8}{9x} + 9 \cdot \frac{4}{3x} - 2 \cdot \frac{7}{6x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3x} = 4;$$

$$46) \frac{1}{9x} + \frac{1}{12x} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{24x} - \frac{13}{72} = 0;$$

$$47) \frac{1}{x+2} + \frac{7}{3(x+2)} = \frac{2}{3}; \quad 48) \frac{5}{x+1} - \frac{3}{2x+2} = \frac{5}{2};$$

$$49) \frac{9}{2x+2} - \frac{7}{3x+3} = 1 \frac{1}{12}; \quad 50) \frac{1}{2-3x} - \frac{1}{4-6x} = \frac{1}{6};$$

$$51) \frac{7}{8x+2} - \frac{11}{20x+5} = 13; \quad 52) \frac{5}{\frac{1}{3}-x} + \frac{13}{1-3x} = 4;$$

$$53) \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1 + \frac{1}{x+2}}{1 - \frac{1}{x+2}} = 2; \quad 54) 1 : \frac{1}{2x-5} = \frac{1}{4} : \frac{1}{3x-5}$$

E. Glieder, die x^2 oder x^3 enthalten und sich fortheben.

$$55) (2x-1)(3x+1) = (6x-12)(x+3);$$

$$56) (4x-7)(9x-48) = 12(3x+1)(x-6);$$

$$57) (2x-5)(2x+5) = (4x-11)(x+1);$$

$$58) (8x+5)(2x+7) = (4x-3)(4x+3);$$

$$59) (2x-1)(144x+5) - 26x = (8x+1) \cdot 36 \cdot x + 11;$$

$$60) \frac{x-5}{2x-9} = \frac{x-4}{2x-6}; \quad 61) \frac{4x-3}{8x+9} = \frac{7x-\frac{19}{2}}{14(x-1)};$$

$$62) (x+4)^2 - x(x+6) = 22; \quad 63) (2x)^2 + 5x(x+7) = (3x)^2 + 70;$$

$$64) \left(4x - \frac{1}{2}\right) \left(5x + \frac{3}{4}\right) = \left(2x + \frac{1}{2}\right) \left(10x - \frac{3}{2}\right);$$

$$65) \left(5 + \frac{x}{2}\right) \left(5 - \frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{4} = x + 12;$$

$$66) (x+1)^2 + (x-2)^2 = (x-1)(x+5) + x^2;$$

$$67) (x-1)^2 + (x-3)^2 + (x-5)^2 = 3 \cdot (x-7)(x+15);$$

$$68) \frac{5x+1}{x-1} - \frac{x-9}{x+1} = 4; \quad 69) \frac{(2x+5)x}{2 \cdot (x-1)(x+2)} = \frac{6}{5};$$

$$70) x(x-1)(x+7) = (x+1)(x+2)(x+3);$$

$$71) \frac{x}{x+1} + \frac{2x}{2x+3} - \frac{2x}{x+2} = \frac{3x^2+4}{(x+1)(2x+3)(x+2)};$$

$$72) \frac{3-x}{8-x} + \frac{8-x}{6-x} + \frac{2-x}{4-x} = \frac{10-x}{8-x} - \frac{x+2}{6-x} + \frac{5-x}{4-x}.$$

F. Buchstaben-Gleichungen.

- 73) $a = bx + c$; 74) $4x - 5a = 3a + 12b$;
 75) $a + b - c = ax - c + b$; 76) $3(x - a) = 12 - (x - 9a)$;
 77) $(x - e)(g + e) = g^2 - e^2$; 78) $4ax - 3bx = 8ap - 6bp$;
 79) $ax + a = bx - b$; 80) $3x + (7x + \frac{1}{4}a) = \frac{1}{4}b + a$;
 81) $5(b - 3a - x) - 2(6a - b - 11x) = \frac{3a + 4b + x}{2}$;
 82) $\frac{x + 4p}{v + 4p} + \frac{x - 3q}{v - 3q} = 2$; 83) $(a - x)(b + c) + b^2 - c^2 = 0$;
 84) $\frac{a^2 + 2ax + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{a + x}{a - b}$; 85) $x - \frac{x + b}{1 - b} + \frac{x + 1}{1 + b} = 0$;
 86) $1 + p^4 + \frac{p^4 - x}{p^4} - \frac{p^3 + x}{p^3} + \frac{p^2 - x}{p^2} - \frac{p + x}{q} = 0$.

G. $x = 0$ oder $\frac{0}{0}$ oder unmöglich.

- 87) $4x + 5 = 5(x + 1)$;
 88) $2ax + b = a(x - b) + x(a + b) - b(x - a - 1)$;
 89) $(3a + b)(3a - b + x) = 9a^2 - b^2$; 90) $(x + p)^2 = x(x + 2p) + p^2$;
 91) $9x - 1 = 3(3x + 5)$; 92) $\frac{5}{3x - 2} + \frac{11}{6x - 4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{21}{9x - 6}$;
 93) $(x + 1)^3 = x^3 + 1 + 3x(x + 1)$;
 94) $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$;
 95) $3x(4a - 1) = 2a(6x - 1) - 3x$; 96) $(x + 3)^2 = x^2 + 9$;
 97) $\frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x} = \frac{2(x + 1)}{x(x + 2)}$; 98) $2x(6x - 1) = (3x + 1)(4x - 2)$.

H. Zerlegung in Faktoren.

- 99) $7(x - 2) = 14x(x - 2)$; 100) $4(x - a) = (7x - 10)(x - a)$;
 101) $14x^2 = 35x$; 102) $x^2 + 9x = 10x$;

103) $\frac{x+2}{x+1} - 5 \frac{x+2}{x+1} = x+2;$

104) $(x-3)(x-4) = (2x+9)(x-3);$

105) $(2x-6)x = (x-3)(5x+8);$ 106) $(x+1) \cdot 5 = x^2 - 1;$

107) $9x^2 - 4 = 9x^2 + 12x + 4;$ 108) $a - b + x = a^2 - 2ab + b^2 - x^2;$

109) $\left(\frac{x}{2} + 5\right)(4x-1) = (x+10)(3x-1);$

110) $\frac{5x-7}{5} = \left(x - \frac{7}{5}\right)\left(x + \frac{7}{5}\right);$ 111) $9x^2 - 1 = 21x - 7;$

112) $\frac{x-1}{6} = \frac{x}{6}(x+1) - \frac{1}{6}(x+1);$

113) $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - 4x + 7).$

I. Nach mehreren Buchstaben auflösen.

Betrachte nach einander jeden vorkommenden Buchstaben als Unbekannte und berechne dann:

114) $4a - 3b = 2(a + 2b);$ 115) $3(a + b) - 2(a - b) = 5a;$

116) $\frac{4p-q}{5} + \frac{7p+q}{10} = \frac{p+1}{2};$ 117) $\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} = q;$

118) $a^2 - 4 = (p + 3q)(a + 2);$ 119) $x(1 - y) = 1 + y;$

120) $bcd - bc - bd - cd + b + c + d = 1;$

121) $3x - 5y + 7z = \frac{4}{9}(x - y + 3z).$

K. Ungleichungen.

Finde eine Ungleichung von der Form $x < a$ oder $x > a$, wo a eine bekannte Zahl ist:

122) $7x - 3 > 4(x - 1);$ 123) $8x - 5 - (x - 1) < 2(x + 4);$

124) $\frac{3x-5}{9} - \frac{x-2}{3} < \frac{5(x+1)}{6};$ 125) $x + p < 2q + 3x;$

126) $\frac{1-4x}{12} - \frac{2+x}{9} + \frac{4-3x}{8} - \frac{5}{6}(1+x) > x.$

L. Eingekleidet.

127) Suche eine Zahl, welche die Eigenschaft hat, dass das um 9 verminderte Vierfache derselben gleich ihrem Dreifachen ist.

128) Wie heisst die Zahl, aus der sich dasselbe ergibt, gleichviel, ob man ihr Doppeltes um 11 vermehrt, oder ob man sie mit 5 multipliziert und vom Produkt 10 abzieht?

129) Teilt man das um 13 vermehrte Vierfache einer gesuchten Zahl durch 7, so erhält man 3.

130) Teilt man das um 14 vermehrte Doppelte einer gesuchten Zahl durch 9, so erhält man die gesuchte Zahl selbst.

131) Jemand, der eine gewisse Zahl vervierfachte, erhielt 1 mehr als jemand, der dieselbe Zahl erst um 2 verminderte und die Differenz mit 5 multiplizierte. Wie heisst die Zahl?

132) Welche gemischte Zahl ist um ihr Achtel kleiner als 21?

133) Welche Zahl hat die Eigenschaft, dass, wenn man sie mit $\frac{5}{6}$ multipliziert, 1 mehr herauskommt, als wenn man sie mit $\frac{4}{5}$ multipliziert?

134) Welche Zahl hat die Eigenschaft, dass der a te Teil vor ihr um b grösser ist, als der $(a+1)$ te Teil?

135) Ein Krämer verkaufte von einer Ware 5 kg. Dadurch dass er den noch übrig gebliebenen Rest zu 3 Mark pro kg. verkaufte, nahm er dabei ebensoviel ein, als wenn er von vornherein den Gesamt-Vorrat zu 2 Mark 50 Pfg. verkauft hätte. Wie gross war dieser?

136) In einer Küche sind 400 Stangen Spargel von zwei Mägden abzuschälen. Die erste Magd schält

in jeder Minute 3 Stangen, die andere nur 2 Stangen. Die zweite arbeitet aber 25 Minuten länger als die erste. Wie lange hat die erste gearbeitet?

137) Hermann und Anna, ein Zwillingpaar, hatten Geburtstag. Die Eltern schenkten beiden Geschenke von gleichem Gesamtwerte. Hermann erhielt einen Baukasten im Werte von 5 Mark und 12 Schreibbücher, Anna eine Puppenstube im Werte von 6 Mark und 8 Schreibbücher. Wie teuer war jedes Schreibbuch?

138) Ein 54jähriger Vater hatte einen 21jährigen Sohn. Vor wie viel Jahren war der Vater viermal so alt wie sein Sohn?

139) Ein Bruch hat zum Nenner 12. Subtrahiert man von ihm einen Bruch, dessen Zähler und Nenner je um 3 kleiner sind, als Zähler und Nenner des ursprünglichen Bruchs, so erhält man $\frac{1}{36}$ als Differenz. Wie heisst der Zähler des ursprünglichen Bruchs.

140) Um welche Zahl muss man Zähler und Nenner des Bruches $\frac{13}{21}$ vermindern, damit der Wert des entstandenen neuen Bruches $\frac{1}{2}$ werde?

141) Eine Zahl ist in zwei Summanden zerlegt, von denen der erste um 3 grösser ist als die Hälfte der Zahl, der zweite um 2 grösser ist als der vierte Teil der Zahl. Wie heisst die Zahl? Wie heissen die Summanden?

142) Ein Schiffsanlege-Pfosten steht mit der Hälfte seiner ganzen Länge in der Erde, mit einem Drittel seiner Länge im Wasser, und ragt dann noch 5 Meter aus dem Wasser hervor. Wie lang ist der Pfosten?

143) Jemand hatte in der rechten Tasche 3mal soviel Mark wie in der linken. Als er aber 17 Mark

aus der rechten Tasche in die linke gesteckt hatte, hatte er in der linken 6 mal soviel wie in der rechten. Wieviel hatte er anfänglich in der linken Tasche?

144) Jemand giebt beim Spiel alles Geld, das er bei sich hat, als Einsatz hin. Er gewinnt dann den dritten Teil des Einsatzes. Darauf verliert er von Einsatz nebst Gewinn den vierten Teil, darauf von seinem nunmehrigen Besitz die Hälfte. Nunmehr nur noch im Besitze von 9 Mark, hört er auf zu spielen. Wieviel Mark hatte er anfangs bei sich?

145) Jemand besitzt soviel Zweimark-Stücke wie ein Anderer Einmark-Stücke und wie ein Dritter Zehnpfennig-Stücke. Zusammen hatten sie einen Geldwert von 62 Mark. Wieviel Geldstücke hatte Jeder?

146) Bei einer Stichwahl hatte der Gewählte drei Stimmen mehr erhalten, als die Hälfte der abgegebenen Stimmen, der, der nicht gewählt war, 2 Stimmen mehr als ein Drittel der abgegebenen Stimmen. Wieviel Stimmen waren abgegeben?

147) Eine Schule hatte 19 mal soviel einheimische Schüler wie auswärtige. Als aber 5 auswärtige Schüler neu aufgenommen waren und 5 einheimische abgegangen waren, gab es nur 15 mal soviel einheimische wie auswärtige Schüler, obwohl die Gesamtzahl dieselbe geblieben war. Wie gross war die letztere?

148) Jemand bezahlt für 5 Kilogramm Kaffee und 4 Kilogramm Zucker 13 Mark und 30 Pfennige. Wieviel kostete 1 Kilogramm Kaffee, wenn dasselbe dreimal so teuer war als 1 Kilogramm Zucker?

149) Eine Köchin hatte Anspruch auf 180 Mark jährlichen Lohn und ein Weihnachtsgeschenk. Jedoch schon nach einem vierteljährlichen Dienst entliess sie die Herrschaft kurz vor Weihnachten und gab ihr

55 Mark. Wie hoch wurde das Weihnachtsgeschenk gerechnet?

150) Ein Kapital von 7000 Mark hat nach einer gewissen Zahl von Jahren 3220 Mark Zinsen eingebracht. Die Hälfte der Zeit war es zu 5 Prozent, ein Drittel der Zeit zu $4\frac{1}{2}$ Prozent, ein Viertel der Zeit zu 4 Prozent verliehen. Wie lange war es im ganzen ausgeliehen?

151) Wenn Jemand eine Ware für 216 Mark verkauft, so gewinnt er gerade soviel Prozent, wie er verlieren würde, wenn er sie zu 184 Mark verkaufen müsste. Wieviel Mark betrug der Einkaufspreis?

152) Ein Kapital von 8000 Mark wird am 1. Juli 1896 zu 4% , 3 Jahre später ein Kapital von 10000 Mark zu $3\frac{1}{2}$ Prozent auf Zinsen gegeben. In welchem Jahre haben beide Kapitalien gleichviel Zinsen abgeworfen?

153) Jemand hatte nach 10jähriger Verzinsung seines Kapitals an Kapital nebst Zinsen ebensoviel, wie ein anderer, dessen unverzinstes Kapital 2000 Mark mehr betrug. Wie gross war das Kapital des Ersteren, wenn die Verzinsung in beiden Fällen mit 4 Prozent geschah?

154) 82 Mark sollen unter vier Personen so verteilt werden, dass jede folgende 5 Mark mehr erhalte als die vorhergehende. Wieviel Mark bekommt die erste Person?

155) Drei Brüder im Alter von 12, 14 und 16 Jahren sollen 840 Mark im Verhältnis ihres Alters teilen. Wieviel bekam jeder?

156) In einem Viereck, dessen Winkelsumme bekanntlich 360 Grad beträgt, verhalten sich die Winkel

wie 3 zu 4 zu 5 zu 6. Wieviel Grad beträgt jeder Winkel?

157) Wieviel Primaner hatte ein Gymnasium von 300 Schülern, bei dem die Zahl der Primaner und Sekundaner zusammen den fünften Teil von der Zahl der Schüler in den übrigen Klassen betrug, und bei dem die Sekunden 10 Schüler mehr hatten als die Primen?

158) Der galvanische Strom zerlegt 18 Liter Wasser in 16 Kilogramm Sauerstoff und 2 Kilogramm Wasserstoff. Nun hatte Jemand bei einer solchen Zerlegung 21 Kilogramm Sauerstoff mehr erhalten als Wasserstoff. Wieviel Liter Wasser hatte er zerlegt?

159) Wieviel Liter Wasser muss ein Weinhändler zu 200 Liter Wein im Preise von 1¹/₄ Mark pro Liter hinzusetzen, um den Wein ohne Schaden zu 1 Mark pro Liter verkaufen zu können?

160) Eine Salzsoole ist 20-prozentig und wiegt 100 Kilogramm. Wieviel Kilogramm Wasser muss man zusetzen, damit die Soole 16-prozentig werde?

161) Jemand mischt 2 Weinsorten im Verhältnis 1 zu 2. Die erste Sorte, von der er weniger nimmt, kostet ihm 1 Mark pro Liter. Wieviel kostet die zweite, bessere Sorte, wenn er die Mischung zu 1 Mark 20 Pfennige pro Liter verkaufen kann, ohne Schaden oder Nutzen zu haben?

162) Wieviel Kilo Silber vom Feingehalte $\frac{720}{1000}$ und wieviel vom Feingehalte $\frac{848}{1000}$ müssen zusammenschmolzen werden, damit sich 8 Kilo Silber vom Feingehalte $\frac{800}{1000}$ ergeben?

163) Auf 12 Kilo Holz muss man 1 Kilo Eisen vom spezifischen Gewicht 7 legen, um zu erreichen, dass das so beschwerte Holz das spezifische Gewicht 1 erhält. Welches spezifische Gewicht hatte das unbeschwerte Holz?

164) Einem Diebe, der um 5 Uhr morgens den Ort A verlassen hat, wird um 7 Uhr ein berittener Polizist nachgesandt, der in jeder Stunde 9 Kilometer zurücklegt und den Dieb um $9\frac{1}{2}$ Uhr einholt. Wieviel Kilometer hatte der Dieb in der Stunde zurückgelegt?

165) Ein Weg von Schmiedeberg auf die Schneekoppe beträgt 21 Kilometer. Gleichzeitig brechen zwei Touristen von den beiden Endpunkten dieses Weges auf. Nach wieviel Minuten begegnen sie sich, wenn der aufwärts gehende Tourist in der Minute 60 Meter, der abwärts gehende Tourist aber 90 Meter zurücklegt?

166) Von den Endpunkten eines 1700 Meter langen Weges gehen zwei Fussgänger sich entgegen, von denen der eine in jeder Minute 12 Meter mehr zurücklegt, als der andere. Sie treffen sich nach 10 Minuten. Wieviel Meter brauchte der, welcher schneller ging?

167) Einem Boten, der einen Ort A um 6 Uhr morgens verlassen hat, und zum Kilometer 12 Minuten braucht, wird um 8 Uhr 20 Minuten ein Radfahrer nachgesandt, der zum Kilometer 5 Minuten braucht. Um welche Zeit holt der Radfahrer den zu Fuss gehenden Boten ein? Wieviel Kilometer von A erreicht er ihn?

168) Zwei Schiffe, die 2300 Meter von einander entfernt sind, fangen zugleich an, sich nach einer und derselben Richtung zu bewegen. Das voraneilende Schiff legt in jeder Minute 57 Meter, das nachfolgende

75 Meter zurück. Wieviel Meter hat das langsamere fahrende Schiff zurückgelegt, als es von dem schnelleren überholt wird?

169) Zwei sich entgegen fahrende Radfahrer sind 900 Meter von einander entfernt. Nach wieviel Zeit sind sie nur 200 Meter von einander entfernt, wenn der eine zu 4 Metern, der andere zu 3 Metern eine Sekunde braucht?

170) Ein Handwerksbursche, der zum Kilometer 13 Minuten braucht, legt die Entfernung von A nach B in derselben Zeit zurück, wie ein Radfahrer einen 32 Kilometer längeren Weg zurücklegt, wenn der Radfahrer nur 5 Minuten zum Kilometer braucht. Wieviel Kilometer beträgt die Entfernung von A nach B?

171) Mit Benutzung eines zusammenstellbaren Fahrscheinheftes befährt Jemand 1500 Kilometer, und zwar 20 Stunden lang in Schnellzügen und 20 Stunden lang in Personenzügen. Wie berechnet sich hiernach die Geschwindigkeit der Schnellzüge, wenn angenommen wird, dass dieselben $1\frac{1}{2}$ mal so schnell fahren, wie Personenzüge?

172) Ein Omnibus, der stündlich 9 Kilometer zurücklegt, fuhr von einer Eisenbahn-Station nach einem benachbarten Bade-Ort, von wo er nach 20 Minuten Aufenthalt nach der Station zurückkehrte. Gleichzeitig mit dem Omnibus brach ein Fussgänger von der Station auf, der das Kilometer in $13\frac{1}{2}$ Minuten zurücklegte. Er begegnete dem Omnibus auf dessen Rückkehr, nachdem er gerade 2 Stunden gegangen war. Wie weit ist die Entfernung von der Station zu dem Bade-Ort?

173) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die grössere Kathete 12 Zentimeter lang, die kürzere Kathete ist

aber 8 Zentimeter kürzer als die Hypotenuse. Wie lang ist letztere?

174) Im Mittelpunkt eines quadratischen Teichs von 10 Fuss Länge und Breite wächst ein Schilf, das sich einen Fuss hoch über dem Wasser erhebt. Als man dasselbe an das Ufer nach der Mitte einer Seite hinzog, reichte es nur bis an den Rand des Teiches. Welche Tiefe hat das Wasser? (Aus dem Kieou Tschang, einem Arithmetikbuche, das nach chinesischer Angabe um 2600 vor Chr. verfasst sein soll.)

175) Ein Sektor von Gold, dessen spezifisches Gewicht 19 ist, und ein Sektor von Blei, dessen spezifisches Gewicht 11 ist, sind gleich schwer. Sie bilden, zusammengelegt, gerade einen Kreis. Wieviel Grad fasst jeder Sektor?

176) Stellt man ein Bataillon Soldaten in ein volles Karree, so bleiben 24 Mann übrig. Stellt man ein Quadrat, in dessen Seiten 1 Mann mehr steht, so fehlen 29 Mann, um es genau auszufüllen. Welche Stärke hat das Bataillon?

177) Wie lang ist die Seite eines Quadrats, dessen Inhalt um 23 Quadratmeter wächst, wenn die Seite um 1 Meter wächst?

178) Ein Zeichenbogen misst an der längeren Seite 70 Zentimeter. Nachdem an jeder der 4 Seiten, ein Streifen von 3 Zentimeter Breite abgeschnitten war, war der Flächeninhalt um 672 Quadratzentimeter kleiner geworden. Wie lang war die kürzere Seite ursprünglich?

179) Um 6 Uhr bilden die beiden Zeiger einer Uhr eine gerade Linie. Wieviel Minuten nach 7 Uhr bilden sie wieder eine gerade Linie?

180) Wann zwischen 6 und $6\frac{1}{2}$ Uhr bilden die beiden Zeiger einer Uhr einen rechten Winkel?

181) Um das Wasser aus einem Schiff auszupumpen, sind drei Pumpen da. Die erste würde, wenn sie allein thätig wäre, das Schiff in 6 Stunden leer pumpen, die beiden andern je in 4 Stunden. Nun sind sie aber alle drei gleichzeitig in Thätigkeit. In wieviel Zeit können sie das Wasser entfernen?

182) Die Arme eines zweiarmigen Hebels sind 20 und 24 Centimeter lang. Der Hebel ist im Gleichgewicht, da am kürzeren Hebelarm 3 Kilo mehr hängen, als am längeren Arm. Wieviel Kilo hängen an dem letzteren?

183) Ist r der Radius der Krümmung eines Hohlspiegels, a die Entfernung eines Objekts von diesem Spiegel, α die Entfernung seines Bildes vom Spiegel, so ist $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \right)$. Jemand fand nun, dass bei einem Hohlspiegel, der einen Krümmungsradius von 80 Zentimeter hatte, ein Bild 5 mal soweit vom Spiegel abstand, als das zugehörige Objekt. Welche Entfernung vom Spiegel hatte das Objekt?

184) Eine mit einer Anfangsgeschwindigkeit von c Meter vertikal aufwärts geschossene Kugel hat nach t Sekunden eine Höhe von $(c \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot t^2)$ Meter. Eine Büchsenkugel hatte nun nach 4 Sekunden eine Höhe von 1121 Meter 60 Zentimeter erreicht. Mit welcher Geschwindigkeit war sie abgeschossen?

185) Die erste Ziffer einer dreiziffrigen Zahl ist eine Eins. Lässt man dieselbe am Anfang fort, und setzt sie dann hinten an, so entsteht eine neue dreiziffrige Zahl, die $3\frac{5}{6}$ mal so gross ist, als die ursprüngliche Zahl. Wie heisst die letztere?

186) Eine sechsziffrige Zahl hat als letzte Ziffer eine 1. Lässt man dieselbe hinten fort, und setzt sie vorn vor, so entsteht eine neue sechsziffrige Zahl, die gerade $\frac{1}{3}$ der ursprünglichen Zahl ist. Wie hiess dieselbe?

187) Setzt man bei einer gesuchten dreiziffrigen Zahl 73 davor, so entsteht eine fünfziffrige Zahl, die $4\frac{2}{7}$ mal so gross ist, als die fünfziffrige Zahl ist, die entsteht, wenn man 73 hinten ansetzt.

§ 17. Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

A. Ganzzahlige Unbekannte.

- 1) $\begin{cases} x+y=19 \\ x-y=7 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x-y=20 \\ x+y=26 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x-2y=6 \\ x+2y=34 \end{cases}$;
- 4) $\begin{cases} y+5x+12 \\ y-5x=2 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3y-2x=13 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} 11x+8y=76 \\ 11x+7y=72 \end{cases}$;
- 7) $\begin{cases} 2x+3y=31 \\ 3x-y=8 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} 7x-3y=15 \\ 5x+6y=27 \end{cases}$; 9) $\begin{cases} 8x+17y=42 \\ 2x+19y=40 \end{cases}$;
- 10) $\begin{cases} 4x+5y=40 \\ 6x-7y=2 \end{cases}$; 11) $\begin{cases} 17x-18y=15 \\ 5x+12y=39 \end{cases}$; 12) $\begin{cases} 28x+y=33 \\ -21x+11y=34 \end{cases}$;
- 13) $\begin{cases} 3(4x-y)=20+y \\ 9x-y-17=0 \end{cases}$; 14) $\begin{cases} 5(x-2y)-(x-y)=-24 \\ 11(2x+3y)+(2x-y)=200 \end{cases}$;
- 15) $\begin{cases} x=y+7 \\ 3y=5(x+1) \end{cases}$; 16) $\begin{cases} 2x=20-y \\ 4(x+y)=70+y \end{cases}$; 17) $\begin{cases} x=9y \\ 4x-70=y \end{cases}$;
- 18) $\begin{cases} x:y=3:4 \\ x+y=14 \end{cases}$; 19) $\begin{cases} 33x-(y+9)=23 \\ 44x+3(y+1)=50 \end{cases}$;

$$20) \begin{cases} 108x - 153y = 18 \\ 144x - 85y = 262 \end{cases}; \quad 21) \begin{cases} -216x + 4 = 44y \\ 360x + 77y = 25 \end{cases}$$

B. Die Unbekannten werden auch Brüche.

$$22) \begin{cases} 4x - 7y = -5 \\ 5x + y = \frac{7}{2} \end{cases}; \quad 23) \begin{cases} 9x - \frac{1}{4}y = 13 \\ 3x + \frac{1}{5}y = 14 \end{cases};$$

$$24) \begin{cases} 3x - 7y = -1 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}; \quad 25) \begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{6} \\ \frac{5}{8}x + \frac{1}{9} = y \end{cases};$$

$$26) \begin{cases} 1\frac{1}{6}x - y = 5\frac{1}{2} \\ 5x + y = 31\frac{1}{2} \end{cases}; \quad 27) \begin{cases} 0,5x - y = \frac{1}{2} \\ 0,6x + y = \frac{3}{5} \end{cases};$$

$$28) \begin{cases} 3\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) = 5 \\ 4 - 3\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{6}\right) = 2 \end{cases}; \quad 29) \begin{cases} 9 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}y\right) = 14 \\ 5 + \frac{5}{4}(x + y) = 9 \end{cases};$$

$$30) \begin{cases} 4,15x - 0,5(4 - y) = 11 \\ 8,3x + \frac{3}{8}(y - 2) = 21 \end{cases}; \quad 31) \begin{cases} 21x - \frac{1}{2}y = 4 \\ 24x + \frac{1}{3}y = 10 \end{cases};$$

$$32) \begin{cases} 5x - \left(3y - \frac{1}{2}\right) = 0,75 \\ 4 + x - 2\left(y - \frac{1}{3}\right) = 0,64 \end{cases}; \quad 33) \begin{cases} 3,2x - 1,2y = 14 \\ 0,8x + 1,8y = 20 \end{cases}$$

C. Buchstaben-Gleichungen.

$$34) \begin{cases} 5x - 2y = 5a - 2b \\ 3x + 4y = 3a + 4b \end{cases}; \quad 35) \begin{cases} 7x - y - 6a = 8b \\ 5(x + y) = 10a \end{cases};$$

$$36) \begin{cases} 2x + 3y = 10a - 2b + 3c \\ x - 2y = -2a - b - 2c \end{cases}; \quad 37) \begin{cases} x + 3y = a(b + 3c) \\ 2x - y = a(2b - c) \end{cases};$$

$$38) \begin{cases} 2x + y = 2e \\ 2x - y = 2f \end{cases}; \quad 39) \begin{cases} 2x + 3y = 13c + 12d \\ x + 2y = 8c + 7d \end{cases};$$

$$40) \begin{cases} ax + by = a^2 + b^2 \\ ax - 2by = a^2 - 2b^2 \end{cases}; \quad 41) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases};$$

$$42) \begin{cases} (a+b)x - cy = a^2 + ab \\ ax - (b+c)y = a^2 \end{cases}; \quad 43) \begin{cases} \frac{3}{2}ax + fy = \frac{5}{2}af \\ x - y = f - a \end{cases}$$

D. Brüche fortschaffen und Klammern lösen.

$$44) \begin{cases} 4(3x - 5) - 2(y - x) = 2 \\ 2(5x - y) - 3y = 5 \end{cases};$$

$$45) \begin{cases} \frac{4}{5}(x - y) - \frac{1}{10}x - \frac{1}{20}y = 14 \\ \frac{5}{6}(x - 14) - \frac{7}{12}(y + 12) = -2 \end{cases};$$

$$46) \begin{cases} \frac{7}{2x - y} = \frac{1}{x - y} \\ 3x + y = 23 \end{cases}; \quad 47) \begin{cases} 4(x - 3y) = 8 \\ \frac{x + y}{x - 2y} = 3 \end{cases};$$

$$48) \begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{3x + 5y}{4} - \frac{5x + 3y}{11} = \frac{x + 5y}{11} \cdot \frac{5}{2}; \end{cases}$$

$$49) \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 2 \\ \frac{7x + 3y}{6} - \frac{x + y}{8} = \frac{5x + 3}{6} + \frac{x + y}{4}; \end{cases}$$

$$50) \begin{cases} \frac{3x - y + 1}{56} - \frac{7x - 2y}{14} = \frac{x + y - 1}{8} \\ \frac{x + y}{9} - \frac{2x + y + 7}{18} = 7x - 2y \end{cases};$$

$$51) \left\{ \begin{array}{l} \frac{3x+y}{2} - \frac{1}{8} = \frac{2x+4y+1}{5} \\ \frac{6x+4y}{13} = \frac{x+y-\frac{5}{4}}{5} \end{array} \right. ;$$

$$52) \left\{ \begin{array}{l} \frac{4x+5y+49}{4} + \frac{3-x-y}{52} = \frac{1}{2} \\ -\frac{x}{2} = \frac{y}{8} + \frac{5x-2y+2}{4} \end{array} \right. ;$$

$$53) \left\{ \begin{array}{l} 14 - \frac{x+y}{12} + \frac{2}{3} = \frac{x+5}{6} + \frac{y}{3} + 7 \\ \frac{4}{5}(x+y) - \frac{2}{15}(2x+y+1) = x+3 \end{array} \right. ;$$

$$54) \left\{ \begin{array}{l} \frac{4(x+y-3)-8}{9} - \frac{1}{6} - \frac{5(x+2y-6)}{18} = \frac{x}{3} + \frac{y-11}{6} \\ \frac{5x-4}{21} - \frac{x+2}{7} = \frac{x-5y}{14} \end{array} \right. .$$

E. Unbestimmbare Unbekannte.

$$55) \left\{ \begin{array}{l} 15x - (x+7y) = 9 \\ 2x - y = 1 \end{array} \right. \frac{2}{7} ; 56) \left\{ \begin{array}{l} 9x - 6y = 11 \\ 6x - 4y = 13 \end{array} \right. ;$$

$$57) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{4} - \frac{y-1}{8} = 1 \frac{1}{8} \\ \frac{x}{3} - \frac{y-2x}{6} = \frac{y+16}{6} \end{array} \right. ; 58) \left\{ \begin{array}{l} 3x - \frac{y}{3} = 5 \\ 7(x+2y) + 2x = 15(y+1) \end{array} \right. ;$$

$$59) \left\{ \begin{array}{l} ax - by = a \\ \frac{a}{b}(x-1) = y \end{array} \right. ; 60) \left\{ \begin{array}{l} 3(x+y-c) = 2(x-c) + x + 3y - c \\ x + 7y = 15c \end{array} \right. .$$

F. Drei und mehr Unbekannte.

$$61) \begin{cases} x+y+z=9 \\ 2x-y+3z=13; \\ 5x+y-3z=1 \end{cases}; \quad 62) \begin{cases} 3(x-y)+z=4 \\ 5(x+2y-z)=6(x+y+1); \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{4} + z=3 \end{cases};$$

$$63) \begin{cases} x + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 8 \\ \frac{x}{14} - \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = \frac{1}{2}; \\ 4 - \left(x - \frac{y}{2}\right) = y - z \end{cases}; \quad 64) \begin{cases} 3x + 6y - z = 2 \\ x + 2y = \frac{1}{2}z; \\ x + y + z = 5\frac{1}{6} \end{cases};$$

$$65) \begin{cases} x+y=7 \\ y+z=9; \\ z+x=8 \end{cases}; \quad 66) \begin{cases} 2x-y=2 \\ 3x+z=\frac{28}{3}; \\ y+3z=5 \end{cases}; \quad 67) \begin{cases} 9x-y=1 \\ \frac{x+2z}{3} = \frac{2}{3}; \\ y - \frac{z}{6} = 17 \end{cases};$$

$$68) \begin{cases} x+3y = \frac{18}{5} \\ x+5y = 3z \\ 10y-3z+2=0 \end{cases}; \quad 69) \begin{cases} x = y + \frac{1}{2} \\ z = x + \frac{17}{4}; \\ y = 2z - 10 \end{cases};$$

$$70) \begin{cases} \frac{8x+y-z}{3} - \frac{8x+3y-4}{6} = 2x+y-z \\ \frac{2x+y+3z}{4} - \frac{2x-y+z}{2} = 2(x+y-3) + z \\ 2x+y+z=6 \end{cases};$$

$$71) \begin{cases} \frac{x-y+z+1}{2} + \frac{x-2y+3z+4}{3} = \frac{x-y+z+13}{6} \\ \frac{x+y+z+1}{2} + \frac{3x-y+z-3}{4} = \frac{x-2y+z-2}{8}; \\ \frac{x-y}{5} - \frac{z+3}{5} + \frac{2}{3}(x-y+z) + \frac{z-1}{3} = \frac{4x-y+z-4}{15} \end{cases};$$

$$72) \begin{cases} 3x + y - 4z = -a + 4b - 3c \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = a + b + c \\ z - y = a - b \end{cases} ; 73) \begin{cases} x + 2y = p \\ 2x + z = q \\ y + 2z = r \end{cases}$$

$$74) \begin{cases} -ax + by + cz = p \\ ax - by + cz = q \\ ax + by = cz \end{cases} ; 75) \begin{cases} ax - by - cz = a^2 - b^2 + c^2 \\ -ax - by + cz = -a^2 - b^2 - c^2 \\ ax + by + cz = a^2 + b^2 - c^2 \end{cases}$$

$$76) \begin{cases} 2x + 3y = 2a + b \\ 6(x + y) = 6a - 2b \\ 6x + z = 2b + \frac{1}{4}c \end{cases} ; 77) \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{4}{y} - \frac{5}{z} = \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = \frac{1}{4} \\ \frac{3}{x} + \frac{8}{y} + \frac{2}{z} = 0,85 \end{cases}$$

$$78) \begin{cases} x + y + z + u = 14 \\ x - y - z + u = 0 \\ 2x + y - z + u = 8 \\ x + y + z + 3u = 24 \end{cases} ; 79) \begin{cases} x + y + z = 9 \\ y + z + u = 3 \\ z + u + x = 5 \\ u + x + y = 7 \end{cases}$$

$$80) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = z - 1 \\ y - z = 2x - u \\ 3\left(x + \frac{7}{5}\right) = y + 6 \\ 4z + \frac{1}{4}u = y - 2x \end{cases} ; 81) \begin{cases} x + y = 7 \\ y + z + u = 6 \\ u + 2v - w = 2 \\ y - v - 5w = 8 \\ x + v + w = 3 \\ z + 2u = 4 \end{cases}$$

G. Eingekleidet.

82) Wie heissen die beiden Zahlen, deren Summe 17 und deren Differenz 5 betragt?

83) Zwei Zahlen von der Eigenschaft zu finden, dass 100 bzw. 120 herauskommt, je nachdem man zum Doppelten der ersten das Dreifache der zweiten addiert, oder zum Dreifachen der ersten das Doppelte der zweiten addiert.

84) Zwei positive Zahlen zu finden, die subtrahiert dasselbe geben wie dividiert, und zwar das Resultat 2.

85) Vermehrt man Zähler und Nenner eines gesuchten Bruches um 1, so erhält man einen Bruch, dessen Wert $\frac{2}{7}$ ist. Vermehrt man Zähler und Nenner aber um 2, so erhält man einen Bruch, dessen Wert $\frac{3}{10}$ ist.

86) Wenn der Schall einer Kanone mit dem Winde 342 Meter zurücklegt, gegen den Wind aber 324 Meter, wie gross ist dann die Geschwindigkeit des Windes und die des Schalles?

87) Von zwei Kleidern kostet der Stoff für das eine 10 Mark mehr als der für das andere. Nachdem sie aber beide zu gleichem Preise, nämlich für 10 Mark, fertig gemacht sind, kostet das teure $\frac{5}{4}$ mal so viel als das billige. Wie theuer ist jedes unangefertigt?

88) Ein Antrag wurde mit einer Mehrheit von 30 Stimmen, d. h. mit drei Viertel aller Abstimmenden angenommen. Wieviel stimmten für, wieviel gegen den Antrag?

89) Für 1000 Mark wechselte Jemand, der Frankreich und England besuchen wollte, 54 Goldstücke ein, die teils ein Pfund Sterling im Werte von 20 Mark, teils 20 Francs im Werte von 16 Mark darstellten. Wieviel bekam er von jeder Art?

90) Je nachdem man jedes der beiden Glieder eines Verhältnisses um 1 vermehrt oder vermindert, erhält man ein Verhältnis, das den Wert $\frac{3}{4}$ bzw. $\frac{2}{3}$ hat. Wie heisst das Verhältnis?

91) Die Quersumme einer gesuchten dreiziffrigen Zahl beträgt 18. Die erste Ziffer ist der 8. Teil der aus den beiden andern Ziffern gebildeten Zahl, und die

dritte Ziffer ebenfalls der 8. Teil der aus der ersten und zweiten Ziffer gebildeten Zahl.

92) Welche zweiziffrige Zahl mit der Quersumme 10 hat die Eigenschaft, dass durch Vertauschung ihrer beiden Ziffern eine Zahl entsteht, die um 36 kleiner ist, als sie selbst?

93) Wie heisst die dreiziffrige Zahl mit der Quersumme 9, die die Eigenschaft hat, erstens, dass sie $\frac{5}{13}$ von der dreiziffrigen Zahl ist, die aus ihr entsteht, wenn man die erste Ziffer hinter die beiden andern setzt, und zweitens, dass die mittlere Ziffer das arithmetische Mittel der beiden andern ist?

94) Jemand hatte zwei Kapitalien ausgeliehen, das erste zu $3\frac{1}{2}$ Prozent, das zweite zu 4 Prozent. Beide zusammen brachten ihm jährlich 830 Mark. Hätte er umgekehrt das erste zu 4 Prozent, das zweite zu $3\frac{1}{2}$ Prozent ausgeliehen, so würde er nur 820 Mark Zinsen geniessen. Wie gross sind die beiden Kapitalien?

95) Zwei Kaufleute hatten zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte, das jährlich 15 Prozent einbrachte, zusammen 16 200 Mark eingeschossen. Dadurch, dass der erste sein Geld 2 Jahre, der zweite aber $2\frac{1}{2}$ Jahre in dem Geschäfte wirken liess, hatten beide gleichviel Gewinn. Wieviel hatte jeder eingeschossen?

96) Bei einer Gesellschaft wurden 10 Liter Weisswein und 12 Liter Rotwein verzehrt. Dies kostete dem Gastgeber 27 Mark 60 Pfennige. Hätte der Rotwein ihm soviel gekostet wie der Weisswein, und umgekehrt, so hätte ihm der Wein nur 27 Mark 40 Pfennige gekostet. Wieviel kostete jede Weinsorte?

97) Wie aus dem Altertum berichtet wird, wog die goldene Krone des Königs Hiero von Syrakus 20 Pfund. Archimedes konstatierte, dass die Krone im Wasser

$18\frac{3}{4}$ Pfund wog, dass aber 20 Pfund reines Gold im Wasser $18\frac{18}{10}$ Pfund und 20 Pfund reines Silber $18\frac{3}{31}$ Pfund wiegen. Aus wieviel Pfund Gold und wieviel Pfund Silber bestand die Krone, da sie keine anderen Metalle enthielt?

98) Wie gross sind die Geschwindigkeiten zweier Punkte, die sich auf derselben geraden Linie bewegen, wenn dieselben 3000 Meter von einander entfernt sind, und wenn bei der Bewegung in derselben Richtung der hintere den vorderen in 30 Sekunden einholt, bei der Bewegung in entgegengesetzter Richtung sie sich aber nach 25 Sekunden treffen?

99) Ein Rhein-Dampfer fährt eine Strecke von 60 Kilometern stromaufwärts in 4 Stunden, stromabwärts in 3 Stunden. Wieviel Kilometer legt der Dampfer durch die Arbeit der Maschine und wieviel das Stromwasser in einer Stunde zurück?

100) Auf einer Chaussee gehen aus zwei Städten zwei Wanderer sich entgegen. Sie treffen sich, nachdem jeder 4 Stunden unterwegs war. Sie würden sich erst nach $4\frac{1}{2}$ Stunden getroffen haben, wenn Jeder in der Stunde ein halbes Kilometer weniger gegangen wäre. Wäre der eine in der Stunde $\frac{1}{4}$ Kilometer mehr gegangen, der andere weniger, so hätten sie sich gerade in der Mitte des Weges getroffen. Wieviel Kilometer legte jeder in der Stunde zurück, und wie weit waren die Städte von einander entfernt?

101) Eine Strecke ist nur um 1 Zentimeter länger, als eine andere, das über sie errichtete Quadrat aber 27 Quadratzentimeter grösser als das Quadrat über der andern Strecke. Wie lang sind beide Strecken?

102) Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks zu

berechnen, dessen Hypotennuse unverändert blieb, als die kleinere Kathete um 8 Zentimeter länger, die grössere aber um 4 Zentimeter kürzer wurde. Die Summe beider Katheten betrug 31 Zentimeter.

103) Differenz, Summe und Produkt zweier Zahlen verhalten sich wie 1 zu 5 zu 12. Berechne die Zahlen dadurch, dass ihre reziproken Werte als Unbekannte eingeführt werden.

104) Der in einer belagerten Festung aufgespeicherte Proviant ist bis zu einem gewissen Zeitpunkt für die Besatzung ausreichend. Wären jedoch 1000 Mann Besatzung weniger, so würde der Vorrat 4 Wochen länger reichen, dagegen 5 Wochen weniger, wenn 2000 Mann Besatzung mehr vorhanden wären. Wie stark war die Besatzung?

105) Drei Zahlen zu bestimmen, dass sich 6, 8, 12 als Summe ergibt, wenn man auf alle mögliche Weise immer zwei von ihnen addiert.

106) Wie alt waren 1880 Lessing, Goethe und Schiller, wenn die ersten beiden zusammen 82 Jahre zählten, während Lessing und Schiller zusammen 72 und endlich Goethe und Schiller zusammen nur 52 Jahre zählten?

107) Max, Paul und Karl hatten in ihren Sparbüchern kein anderes Geld als Markstücke, aber verschieden viel. Um eine grössere Gleichmässigkeit zu erzielen, sollte erst Max die Hälfte seines Geldes herausnehmen, und von dem herausgenommenen Gelde jedem von den beiden andern die Hälfte geben. Nach der Verteilung sollte Paul so verfahren, und darnach schliesslich Karl. So stellte sich heraus, dass zuletzt alle gleichviel, nämlich 8 Markstücke hatten. Wieviel Markstücke hatte anfänglich jeder in seiner Sparbüchse?

108) Jemand hat für seine verschiedenen Zahl-Pflichten

drei Portemonnaie's. Nimmt er aus dem ersten 12 Mark und legt dieses Geld in das zweite, so hat er im zweiten doppelt soviel wie im ersten. Nimmt er aber aus dem dritten Portemonnaie 12 Mark und legt sie in das erste, so hat er in allen dreien gleichviel Geld. Wieviel Mark hatte er in jedem Portemonnaie?

109) Drei Studenten kehren in einem Wirtshause ein, wo sie recht viel verzehren. Niemand konnte die Zeche allein von seinem Gelde bezahlen, obwohl sie zusammen 35 Mark besaßen. Nahm aber der erste $\frac{1}{4}$ von dem, was der zweite bei sich hatte, zu seinem eigenen Gelde hinzu, so konnte die Zeche bezahlt werden; ebenso auch, wenn der zweite zu seinem Gelde $\frac{2}{3}$ von dem Gelde des dritten hinzunahm; ebenso endlich, wenn der dritte zu seinem Gelde $\frac{2}{3}$ von dem des ersten hinzunahm. Wieviel hatte jeder bei sich und wie hoch belief sich die Zeche?

110) Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden, durch die erste und zweite in 12 Minuten, durch die zweite und dritte in 4 Minuten, durch die dritte und erste in $4\frac{2}{3}$ Minuten. In wieviel Minuten durch jede einzeln?

111) Wie heissen die vier Zahlen, aus denen man die Summen 9, 10, 11, 12 erhält, je nachdem man irgend welche drei von ihnen zu einer Summe zusammenfasst.

V. Abschnitt. Quadratisches.

§ 18. Quadrieren und Quadratwurzel-Ausziehung.

Führe die folgenden Quadrierungen aus:

- 1) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$; 2) $(-7)^2$; 3) $\left(-3\frac{3}{4}\right)^2$; 4) $(ap)^2$; 5) $(-ap)^2$;
 6) $\left(\frac{p}{q}\right)^2$; 7) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^2$; 8) $(7pqr)^2$; 9) $(7a:5b:3)^2$;
 10) $[9 \cdot 5a:(15ab)]^2$; 11) $(3b^3)^2$; 12) $[(-5):(abc)]^2$;
 13) $(d+e)^2$; 14) $(f-g)^2$; 15) $(f-2g)^2$; 16) $(3a+b)^2$;
 17) $\left(\frac{1}{2}a-b\right)^2$; 18) $(4a=3b)^2$; 19) $\left(6a-\frac{1}{3}b\right)^2$;
 20) $(d+e+f)^2$; 21) $(a+b+c)^2$; 22) $(a-b+c)^2$;
 23) $(4-3a+b)^2$; 24) $\left(a+b-\frac{1}{2}c\right)^2$;
 25) $\left(\frac{1}{2}a-2b+4c\right)^2$; 26) $(ab+bc+ac)^2$;
 27) $\left(x+y+\frac{1}{2}uv\right)^2$; 28) $\left(3x+\frac{1}{3}y+z\right)^2$;
 29) $(x^2-x+1)^2$; 30) $(a-b+c+d)^2$; 31) $(2a+b-2c+d)^2$.

Vereinfache:

- 32) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$; 33) $(\sqrt{4a+b})^2$; 34) $(\sqrt{102400})^2$;
 35) $\sqrt{a:b} \cdot \sqrt{a:b}$; 36) $\sqrt{p+q} \cdot \sqrt{p+q}$; 37) $\sqrt{e^2 f^2}$;
 38) $\sqrt{(a+b)^2:p^2}$; 39) $\sqrt{\frac{a^3 b^3 c^3}{d^3 e^3}}$; 40) $\sqrt{\frac{81}{a^2+b^2+2ab}}$;

41) $\sqrt{\frac{a^3}{a}}$; 42) $\sqrt{\frac{a^5 b^3}{a b}}$; 43) $\sqrt{5^2 - 4^2}$; 44) $\sqrt{16 + 9}$;

45) $\sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{25}}$.

Verwandle in eine Wurzel:

46) $\frac{a}{b} \sqrt{\frac{b^3 c^3}{a^2}}$; 47) $\frac{4a}{p} \sqrt{\frac{p^2 q^2}{16c}}$; 48) $\frac{5a}{3b} \sqrt{\frac{(6b)(3c)}{(10a)(5a)}}$.

Quadriere nach den Formeln für $(a+b)^2$ und $(a+b+c)^2$:

49) $200 + 1$; 50) $200 + 10 + 1$; 51) $300 + 40 + 6$;
 52) 87; 53) 94; 54) 37; 55) 111; 56) 256; 57) 498;
 58) 921; 59) 1234; 60) 4976; 61) 12347; 62) $3a + 2b$;
 63) $5a - 7b$; 64) $a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{10}c$; 65) $-a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{2}c$;
 66) $a^2 - a - b$; 67) $3ab - ac + 2bc$.

Berechne:

68) $\sqrt{361}$; 69) $\sqrt{1681}$; 70) $\sqrt{7396}$; 71) $\sqrt{71824}$; 72) $\sqrt{36864}$;
 73) $\sqrt{15129}$; 74) $\sqrt{136161}$; 75) $\sqrt{3404025}$; 76) $\sqrt{1225449}$;
 77) $\sqrt{3466383376}$; 78) $\sqrt{100600900}$; 79) $\sqrt{1024.1849}$;
 80) $\sqrt{0,1681}$; 81) $\sqrt{16,81}$; 82) $\sqrt{0,031684}$;

83) $\sqrt{\frac{90}{6,4}}$; 84) $\sqrt{\frac{4,9}{1000}}$; 85) $\sqrt{\frac{41,5872}{0,5 \cdot 0,0324}}$; 86) $\sqrt{\frac{3 + \frac{6}{25}}{2 - \frac{2}{9}}}$;

87) $\sqrt{0,0081} \cdot \sqrt{163,84} : \sqrt{2 - \frac{7}{64}} - \sqrt{1331 : 11}$.

Berechne die mittlere Proportionale zu:

88) 32 und 162; 89) 250 und 360; 90) 1,024 und 2,5;
 91) $\frac{14}{75}$ und $\frac{6}{7}$; 92) $\frac{1331}{40,96}$ und $\frac{11}{9}$.

Schliesse in zwei Grenzen ein, die aufeinanderfolgende Quadratzahlen sind:

93) 300; 94) 570; 95) 1100; 96) 5555; 97) 34567.

Berechne die nächstkleinere Quadratzahl zu:

98) 500; 99) 1234; 100) 407896.

Schliesse in zwei Grenzen ein, die Quadrate von Zahlen sind, die sich um $\frac{1}{100}$ unterscheiden:

101) 5; 102) 8; 103) 27; 104) 1000; 105) 7833.

Schliesse in zwei Grenzen ein, die Quadrate von Zahlen sind, die sich um $\frac{1}{3000}$ unterscheiden:

106) 2; 107) 0,2; 108) $5\frac{1}{5}$; 109) 10,34.

Verwandle in Summen oder Differenzen:

110) $\sqrt{49a^2 + 14ac + c^2}$; 111) $\sqrt{81a^2 - 36a + 4}$;

112) $\sqrt{4a^4 + 24ab + \frac{36b^2}{a^2}}$; 113) $\sqrt{\frac{a^2}{36} - \frac{ab}{4} + \frac{9b^2}{16}}$;

114) $\sqrt{0,25a^2 + 0,9ab + 0,81b^2}$;

115) $\sqrt{400a^2 + 200ab + 25b^2 + 120ac + 30bc + 9c^2}$;

116) $\sqrt{729x^4 - 324x^3 + 184x^2 - 56x + 49}$;

117) $\sqrt{4 + \frac{121}{64}x^6 + \frac{57}{4}x^3 + \frac{77}{16}x^5 + \frac{159}{16}x^4 + \frac{53}{4}x^2 + 10x}$;

118) $\sqrt{x^8 + 1 - 14x - 6x^7 + 9x^6 - 14x^5 + 44x^4 - 6x^3 + 49x^2}$;

119) $\sqrt{p^8 + 2p^6 + p^4 + 2p^2 + 4 + \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \frac{2}{p^6} + \frac{1}{p^8}}$;

Berechne durch Zerlegung in Faktoren:

120) $\sqrt{36864}$; 121) $\sqrt{6760000}$; 122) $\sqrt{3 \cdot 34992}$;

123) $\sqrt{6 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 7 \cdot 28}$.

Berechne zwei Zahlen, deren Quadrate gleich den folgenden Zahlen sind:

124) 9; 125) 2,89; 126) $5\frac{4}{9}$; 127) 0,0121; 128) $\frac{63}{700}$.

§ 19. Irrationale Zahlen.

Berechne:

$$1) (\sqrt{5})^2; 2) (\sqrt{5})^4; 3) \left(\sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{2}\right)^2; 4) (\sqrt{21} \cdot \sqrt{7} : \sqrt{3})^2.$$

Verwandle in eine einzige Quadratwurzel:

$$5) \sqrt{3} \cdot \sqrt{7}; 6) \sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \sqrt{14}; 7) \sqrt{4 \frac{1}{4}} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{17}}; 8) \sqrt{25+49}.$$

Zwischen welchen aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen liegt:

$$9) \sqrt{2}; 10) \sqrt{7}; 11) \sqrt{19}; 12) \sqrt{43}; 13) \sqrt{70}; 14) \sqrt{122}?$$

Berechne auf drei Dezimalstellen, d. h. schliesse in rationale Grenzen ein, die sich um $\frac{1}{1000}$ unterscheiden:

$$15) \sqrt{2}; 16) \sqrt{5}; 17) \sqrt{10}; 18) \sqrt{3,5}; 19) \sqrt{0,121};$$

$$20) \sqrt{\frac{11}{16}}; 21) \sqrt{9+25}; 22) \sqrt{\frac{1}{2}}; 23) \sqrt{15 \cdot 17}; 24) \sqrt{12,345}.$$

Schliesse in Grenzen ein, die sich um $\frac{1}{700}$ unterscheiden:

$$25) \sqrt{3}; 27) \sqrt{10,5}; 28) \sqrt{1,2}; 29) \sqrt{1 \frac{8}{9}}; 30) \sqrt{4 \frac{1}{16}}.$$

Berechne auf zwei Dezimalstellen:

$$31) -\sqrt{13}; 32) 7 - \sqrt{5}; 33) \sqrt{2} + \sqrt{3};$$

$$34) \sqrt{2} \sqrt{5} - \sqrt{7} + \sqrt{3}.$$

Suche auf zwei Dezimalstellen die mittlere Proportionale zu:

$$35) 1 \text{ und } 10; 36) 2 \text{ und } 4; 37) 12 \text{ und } 13;$$

$$38) 4,5 \text{ und } 5,4.$$

Berechne:

$$39) \sqrt{\sqrt{2}}; 40) \frac{1}{4} \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}; 41) \sqrt{7 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 1}.$$

Verwandle in das Produkt aus einer rationalen Zahl und der Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl, die keine quadratischen Faktoren mehr enthält:

$$42) \sqrt{18}; 43) \sqrt{75}; 44) \sqrt{80}; 45) \sqrt{288}; 46) \sqrt{1000};$$

$$47) \sqrt{171}; 48) \frac{5}{4} \sqrt{48}; 49) \frac{1}{6} \sqrt{396}; 50) 0,7 \cdot \sqrt{2 \frac{2}{49} \cdot 3}.$$

Verwandle in eine Wurzel:

$$51) \sqrt{3}; 52) \frac{4}{5} \sqrt{10}; 53) 2 \frac{1}{2} \cdot \sqrt{28}; 54) \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\frac{0,16}{9} \cdot 5}.$$

Vereinfache:

$$55) \sqrt{3} + \sqrt{27}; 56) 7\sqrt{7} - \sqrt{28} + \sqrt{63}; 57) \sqrt{18} - \sqrt{8};$$

$$58) 5\sqrt{6} - \sqrt{24} + \frac{1}{2} \sqrt{54}; 59) 7\sqrt{b} - \sqrt{4b} + \sqrt{100b}.$$

Verwandle in das Produkt einer rationalen Zahl mit der Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl, die keine quadratischen Faktoren mehr enthält, oder in eine algebraische Summe von solchen Produkten:

$$60) \sqrt{\frac{3}{5}}; 61) \sqrt{\frac{13}{24}}; 62) \sqrt{\frac{98}{27}}; 63) \sqrt{\frac{13}{2}}; 64) \sqrt{1,6};$$

$$65) \sqrt{1 \frac{44}{125}}; 66) \sqrt{0,144}; 67) \frac{34}{35} \sqrt{\frac{1}{17} \cdot \frac{5}{4}}; 68) \frac{10}{11} \sqrt{\frac{11}{12}};$$

$$69) \sqrt{1 - \frac{1}{49} \cdot \sqrt{343}}; 70) \sqrt{12} + \sqrt{175} + \sqrt{27};$$

$$71) 3\sqrt{28} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{27} + \sqrt{60} - \frac{3}{4} \sqrt{112};$$

$$72) \sqrt{\frac{7}{8}} : \frac{7}{8} - \sqrt{\frac{9}{10}} : \frac{9}{10} + 3\sqrt{14};$$

$$73) \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{\frac{7}{8}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{10}{7}} \sqrt{\frac{14}{3}} \sqrt{\frac{21}{16}};$$

$$74) \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1}{7}} + \sqrt{480} - \sqrt{13 \frac{1}{8}}.$$

Führe die angedeuteten Multiplikationen aus und vereinfache dann:

$$75) \sqrt{2}(\sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{128}); \quad 76) \left(\frac{5}{4}\sqrt{2} - \frac{7}{5}\sqrt{\frac{8}{9}}\right)\sqrt{32};$$

$$77) \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}(\sqrt{24} - \frac{1}{2}\sqrt{96} + \sqrt{486}) + \sqrt{10} \cdot \sqrt{15};$$

$$78) (\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}); \quad 79) (3\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{2});$$

$$80) (5 + 4\sqrt{3})(3 - \sqrt{3}); \quad 81) (\sqrt{3} + \sqrt{6})(\sqrt{6} - 1);$$

$$82) (\sqrt{15} - \sqrt{14})(\sqrt{15} + \sqrt{14}); \quad 83) (2 - \sqrt{2})(6 + 3\sqrt{2});$$

$$84) (11 + 2\sqrt{30})(11 - 2\sqrt{30});$$

$$85) (18 - \sqrt{17} \cdot \sqrt{19})(18 + \sqrt{17} \cdot \sqrt{19});$$

$$86) \left(\frac{1}{2}\sqrt{10} - \frac{1}{3}\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\right);$$

$$87) \left(\frac{3}{4}\sqrt{14} + \frac{1}{8}\sqrt{10}\right)(\sqrt{21} - \sqrt{15});$$

$$88) (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{15});$$

$$89) (\sqrt{15} - \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{6});$$

$$90) (7 - \sqrt{24} + \sqrt{60})(\sqrt{3} + \sqrt{2});$$

$$91) (3 + \sqrt{6} + \sqrt{15})(2 + \sqrt{6} - \sqrt{10});$$

$$92) (\sqrt{15} - \sqrt{6} + \sqrt{3})\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right);$$

$$93) (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{10} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2});$$

$$94) (1 + \sqrt{2})^2; \quad 95) (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2; \quad 96) (\sqrt{10} + \sqrt{6})^2;$$

$$97) (6\sqrt{5} - 5\sqrt{3})^2; \quad 98) (\sqrt{2} - 1)(2 + \sqrt{2} + 1);$$

$$99) (\sqrt{7} + \sqrt{5})(7 - \sqrt{35} + 5); \quad 100) (\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)^2;$$

$$101) (\sqrt{2} - 1)^2; \quad 102) (3\sqrt{5} - \sqrt{10})^2.$$

Schaffe die Wurzelzeichen aus dem Nenner:

$$103) \frac{5}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}; \quad 104) \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}; \quad 105) \frac{6}{\sqrt{10} - 2};$$

$$106) \frac{6}{\sqrt{11} - \sqrt{5}}; \quad 107) \frac{21}{2\sqrt{3} - 3}; \quad 108) \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 2};$$

$$109) \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}; \quad 110) \frac{54}{2\sqrt{7} - 1}; \quad 111) \frac{\sqrt{7} + 1}{8 - 3\sqrt{7}};$$

$$112) \frac{13\sqrt{6}(1 + \sqrt{5})}{2\sqrt{15} - \sqrt{21}}; \quad 113) \frac{\sqrt{7} - \sqrt{2} + 4}{2\sqrt{2} - 7}; \quad 114) \frac{1}{\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1};$$

$$115) \frac{2\sqrt{15} - 5\sqrt{3} - 10 + 3\sqrt{5}}{\sqrt{15} + 2\sqrt{5}}; \quad 116) \frac{46}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2};$$

$$117) \frac{72 - 18\sqrt{5} + 8\sqrt{3} - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{15}}{4\sqrt{6} - 2\sqrt{3} - \sqrt{30}};$$

$$118) \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{21} + \sqrt{15} - \sqrt{6} - \sqrt{30}};$$

$$119) \frac{\frac{13}{6}\sqrt{3} - \frac{7}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{7}}{\sqrt{42} + \sqrt{3} - 2\sqrt{7}};$$

$$120) \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{6} - 6 - 3\sqrt{42} + 6\sqrt{7}}{\sqrt{6} + 3 + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{14}}$$

Vereinfache:

$$121) \left(\sqrt{\frac{a^2 + 1}{2}} - \sqrt{\frac{a - 1}{2}} \right)^2; \quad 122) \frac{p + q}{p - q} \sqrt{\frac{p^2 - 2pq + q^2}{e}};$$

$$123) (\sqrt{e + f} + \sqrt{e - f})(\sqrt{e + f} - \sqrt{e - f});$$

$$124) \frac{\sqrt{a^2 b} + \sqrt{c^2 b}}{a + c}; \quad 125) \sqrt{1 + \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2}};$$

$$126) \frac{p - v}{\sqrt{p} - \sqrt{v}}(\sqrt{p} + \sqrt{v}); \quad 127) \frac{1}{\sqrt{c + 1} - \sqrt{c}};$$

$$128) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

Berechne x aus den folgenden Proportionen:

$$129) \sqrt{3} : \sqrt{6} = x : \sqrt{2}; \quad 130) 14 : \sqrt{7} = \sqrt{7} : x;$$

$$131) \sqrt{3} : x = x : \sqrt{12}; \quad 132) \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{x}{2};$$

$$133) 2 : (\sqrt{5} - 1) = \left(\frac{1}{2} \sqrt{5} - \frac{1}{2} \right) : x;$$

$$134) x\sqrt{5} : 2 = (\sqrt{20} + x) : \sqrt{2}.$$

§ 20. Imaginäre Zahlen.

Wie muss x beschaffen sein, damit imaginär wird:

$$1) \sqrt{1-x}; 2) \sqrt{-x}; 3) \sqrt{5-2x}; 4) \sqrt{1+10x}; 5) \sqrt{x\sqrt{3}-3}?$$

Wie heissen die beiden Zahlen, deren Quadrate gleich einem der folgenden Ausdrücke sind:

$$6) -4; 7) -\frac{9}{25}; 8) -0,16; 9) -1\frac{24}{25}?$$

Berechne:

$$10) (\sqrt{-7})^2; 11) \left(\sqrt{-\frac{2}{3}} \right)^2; 12) \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2};$$

$$13) \left(\sqrt{1-\sqrt{2}} \right)^2.?$$

Bringe auf die Form $+p, -p, +ip$ oder $-ip$, wo p eine positive reelle Zahl ist:

$$14) \sqrt{-18} \cdot \sqrt{-50}; 15) 3\sqrt{-3} \cdot \frac{1}{9} \sqrt{-6}; 16) \sqrt{-42} \cdot \sqrt{-7};$$

$$17) \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-5}; 18) \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-6} \cdot \sqrt{-10} \cdot \sqrt{-3};$$

$$19) \sqrt{-15} : \sqrt{-5}; 20) \frac{-\sqrt{-5}(-\sqrt{-10})}{5\sqrt{-1}};$$

$$21) \frac{1}{\sqrt{-25}}; 22) \frac{i\sqrt{50}}{\sqrt{-5}}; 23) (3\sqrt{-5})^2; 24) i\sqrt{-2};$$

$$25) i^2; 26) i^4; 27) i^5; 28) i^8; 29) i^{11};$$

$$30) i^{4 \cdot 10 + 1}; 31) i^{4 \cdot 10 + 2}; 32) i^{4 \cdot 23 + 3}; 33) i^{4 \cdot 23};$$

$$34) -i^{15}; 35) 1 : i^{13}; 36) (-1) : i^{10};$$

$$37) 5i + i\sqrt{-9}; 38) \sqrt{-20} - \sqrt{-5}.$$

Die folgenden Ausdrücke sollen in der Form $a+ib$, wo a und b reell sind, dargestellt und möglichst vereinfacht werden:

$$39) (1+2i)-(3-i)-3i+(7-2i); \quad 40) \left(\frac{1}{2}+i\right)-\left(\frac{1}{2}-i\right);$$

$$41) i\sqrt{2}-\sqrt{-18}-(3-2i); \quad 42) \sqrt{-6}+i\sqrt{5}+(3-\sqrt{-5});$$

$$43) (2-3i)(3+4i); \quad 44) (5-i)(8+2i);$$

$$45) \left(3\frac{3}{4}-2i\right)(8-4i); \quad 46) i(7-i\sqrt{2})\sqrt{2};$$

$$47) (4-\sqrt{-5})(4+i\sqrt{5}); \quad 48) (0,5i-1)(3i);$$

$$49) \left(4\frac{1}{2}+2i\right)\left(\frac{2}{9}-2i\right);$$

$$50) \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right);$$

$$51) [(1-i)+(\sqrt{2}-5i)][(\sqrt{3}-2i)+(7+8i)];$$

$$52) (1+i)^2; \quad 53) (1-i)^2; \quad 54) (\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2; \quad 55) (2-i\sqrt{6})^2;$$

$$56) (1+2i)^3; \quad 57) (-1+i\sqrt{3})^3; \quad 58) (1-i\sqrt{2})^3;$$

$$59) (5+i\sqrt{3})^2+(5-i\sqrt{3})^2; \quad 60) (e+if)(g+ih);$$

$$61) (\sqrt{p}+i\sqrt{v})(\sqrt{p}-i\sqrt{v}); \quad 62) (a+ib)^2+(a-ib)^2;$$

$$63) (a+ib)^3-(a-ib)^3; \quad 64) (a+ib)\cdot(a-ib):(a^2+b^2);$$

$$65) (1+i)^4; \quad 66) (-1+i)^4; \quad 67) (1-i)^4+2\cdot(1+i)^2;$$

$$68) \frac{4}{1-i}; \quad 69) \frac{100}{3+4i}; \quad 70) \frac{106}{7-2i}; \quad 71) \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i\sqrt{6}};$$

$$72) \frac{15i}{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}; \quad 73) \frac{7}{-3+\sqrt{-5}}; \quad 74) \frac{3-i\sqrt{6}}{7+i\sqrt{6}};$$

$$75) \frac{\sqrt{10}+i}{\sqrt{5}-i\sqrt{2}}; \quad 76) \frac{1-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}; \quad 77) \frac{(2+i)^2}{5-3i};$$

$$78) \frac{1}{\sqrt{3}+1-i\sqrt{2}}; \quad 79) \frac{1+i^3}{(1+i)^3}; \quad 80) \frac{25}{4-3i}+\frac{10}{2-i};$$

$$81) \frac{p+iq}{p-iq}; \quad 82) \frac{\sqrt{a+i\sqrt{c}}}{\sqrt{a+i\sqrt{d}}}; \quad 83) \frac{(a+ib)^2}{a^2-b^2-i(2ab)}.$$

Berechne nach den Formeln für das Quadrieren und für das Radizieren komplexer Zahlen:

84) $(3 + i\sqrt{2})^2$; 85) $(3 - i\sqrt{2})^2$; 86) $\sqrt{7 + 6i\sqrt{2}}$;

87) $\sqrt{7 - 6i\sqrt{2}}$; 88) $\sqrt{-3 + 4i}$; 89) $\sqrt{3 - 4i}$;

90) $\sqrt{-8 - \frac{63}{2}i}$; 91) $\sqrt{2i}$; 92) $\sqrt{-2i}$; 93) $\sqrt{5 - 12i}$;

94) $\sqrt{195\frac{3}{4} - 14i}$; 95) $\sqrt{-2 - \sqrt{-\frac{9}{4}}}$; 96) $\sqrt{\sqrt{-2}}$;

97) $\sqrt{-\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i}$; 98) $\sqrt{28 + 24i\sqrt{2}} + \sqrt{28 - 24i\sqrt{2}}$;

99) $\sqrt{\frac{1}{8} + 4i}$; $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{5}{16}i}$; 100) $\sqrt{\frac{18 + 26i}{3 + i}}$;

101) $\sqrt{\frac{24 + 68i}{\sqrt{20 + 48i}}}$; 102) $\frac{4 + 5i}{4 - 5i} + \sqrt{2i\sqrt{3 - 2}}$.

§ 21. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

A. Rein-quadratisch.

1) $x^2 = 625$; 2) $\frac{x}{5} = \frac{5}{x}$; 3) $x^2 - \frac{16}{25} = 0$; 4) $3x^2 = 108$;

5) $3x^2 = 5\frac{1}{3}$; 6) $\frac{x^2}{3} - 16\frac{1}{3} = 0$; 7) $0,49 = 9x^2$;

8) $(x + \frac{1}{9})(x - \frac{1}{9}) = 0$; 9) $x(x + 7) = 7(x + 28)$;

10) $(2x + 3)(2x - 4) = 2(26 - x)$;

11) $2x(x + 3) - x = 5(x + 1) - 3$; 12) $(x - 3)(x + 2) = 19 - x$;

13) $\frac{x + 2}{x - 2} + \frac{x - 2}{x + 2} = \frac{24}{x^2 - 4}$;

$$14) (3x+1)^2 + (3x-1)^2 = 34; \quad 15) \frac{3}{x} - \frac{1}{x} = \frac{5+(x-5)}{8};$$

$$16) x^2 = 10,24; \quad 17) x^2 = 819200; \quad 18) \frac{73728}{x} = x;$$

$$19) x^2 = b^2; \quad 20) x(x+a) = a(x+1) + a(a-1);$$

$$21) x^2 - 2(2ab)^2 = a^2b^2; \quad 22) ax^2 = a^2(a+4b) + 4ab^2.$$

$$23) x^2 = 3; \quad 24) x^2 = -3; \quad 25) x = -\frac{1}{x};$$

$$26) x(x+1) = (x+2)x - x + x^2 - 5;$$

$$27) (x+4)^2 = 2^3 \cdot x; \quad 28) 1 - \frac{5}{x} = \frac{x^2-1}{x-1};$$

$$29) (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) = 0; \quad 30) 5x^2 = 13;$$

$$31) 4x(x-1) = -4(x-2).$$

B. Wurzeln ganzzahlig.

$$32) x^2 - 6x = 7; \quad 33) x^2 + 8x = 20; \quad 34) x^2 - 6x - 16 = 0;$$

$$35) x(x+5) = 84; \quad 36) x^2 - 7x = 30;$$

$$37) x^2 - 13x + 42 = 0; \quad 38) x^2 - 19x + 88 = 0;$$

$$39) x^2 - x = 110; \quad 40) x^2 + 25x + 46 = 0;$$

$$41) x^2 - 17x + 52 = 0; \quad 42) x^2 + 9x = 190;$$

$$43) 4x^2 - 4x = 120; \quad 44) x^2 + 8x + 15 = 0;$$

$$45) x^2 + 29x - 210 = 0; \quad 46) \frac{x^2}{4} - 4\frac{1}{4} \cdot x + 13 = 0;$$

$$47) x^2 - 32x + 255 = 0; \quad 48) x^2 - 2x - 63 = 0;$$

$$49) x^2 - 61x + 930 = 0; \quad 50) x^2 - 100x + 2499 = 0;$$

$$51) x^2 - 42x - 343 = 0; \quad 52) x^2 \pm 244x \pm 5280 = 0.$$

$$53) x(x-6) = 7x - 42; \quad 54) x^2 + 1 = 5(2x-4);$$

$$55) x(x-1) = 2x(x+3) + 6; \quad 56) (x-11)(x-12) = 2;$$

$$57) (x+1)^2 + (x+2)^2 = 25; \quad 58) (x+4)(x+5) = 2(x+2)(x+4);$$

59) $(x + 6)(x - 4) + (x + 2)(x - 2) = 56$;

60) $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 + (2x + 3)^2 = 29$;

61) $\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 - \frac{3}{3}x = 3$; 62) $4x^2 + (x - 1)^2 - 3x = 31$;

63) $\frac{3x - 1}{x + 2} + \frac{2x - 2}{x - 2} = \frac{8}{x^2 - 4}$;

64) $\frac{x + 4}{x - 1} + \frac{x - 2}{x - 3} = \frac{14}{x^2 - 4x + 3}$.

C. Wurzeln rational.

65) $2x^2 - 5x = 3$; 66) $(4x - 1)x + 1 = 75$;

67) $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$; 68) $7x + \frac{1}{4} = \frac{4x + 7}{16x}$;

69) $9x^2 = x + \frac{2}{3}$; 70) $\frac{5}{x} + \frac{8}{x + 1} = 9$;

71) $\frac{4x - 4}{x + 2} - \frac{3(x + 2)}{x - 3} + 16 = 0$;

72) $x(7x - 1) + \frac{4}{3}x = \frac{20(x + 3) + 8}{2}$;

73) $\frac{1}{2x + 5} - \frac{1}{3x - 7} = -\frac{9}{22}$; 74) $\frac{7 - \frac{5 - 3x}{x + 1}}{6} = \frac{4x + 5}{7x + 2}$;

75) $x(x + 1)(x + 3) = \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{7}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$;

76) $(3 - 2x)(1 - 3x)(2 - x) = x(1 - 6x)(x - 2) = 0$.

D. Wurzeln irrational.

77) $x^2 + 4x = 1$; 78) $x^2 + 22(x + 5) = 0$;

79) $x(x - 2) = 67$; 80) $x(x + 1) = \frac{103}{36}$;

$$81) \frac{1}{32}x^2 + 5 = x; \quad 82) \frac{3}{4}x^2 - x = \frac{19}{24};$$

$$83) \frac{4x-7}{5} + \frac{2x+3}{9} = \frac{23}{45}x^2 - \frac{94}{45};$$

$$84) \frac{2x(2x-5)}{2x-1} - \frac{2}{2x-1} = 3;$$

$$85) x^2 - x = 2 + \sqrt{2}; \quad 86) x^2 = 5x + 1 - 3\sqrt{5}.$$

E. Wurzeln komplex.

$$87) x^2 + 6x + 10 = 0; \quad 88) \frac{x-5}{x+1} = x;$$

$$89) x^2 + x + 1 = 0; \quad 90) x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0;$$

$$91) 2x^2 + 5x + 4 = 0; \quad 92) 36x^2 + 6x + 5 = 0;$$

$$93) 9x^2 + 5 = 12x; \quad 94) \frac{x-1}{x-13} = \frac{1}{x};$$

$$95) \frac{x^2}{4} - 37x + 1370 = 0; \quad 96) (x-3)^2 + x(x-6) + 50 = 0;$$

$$97) \frac{\frac{3x}{2} + 5}{\frac{x}{2} - 7} + \frac{x}{2} = 1; \quad 98) 5x \left(5x + \frac{3}{2} \right) = \frac{15(x-1)}{2}.$$

F. Anwendung der Sätze vom Zusammenhang der Koeffizienten und der Wurzeln.

Rate die ganzzahligen Wurzeln der folgenden Gleichungen.

$$99) x^2 - 13x + 30 = 0; \quad 100) x^2 - 21x + 20 = 0;$$

$$101) x^2 + 13x + 40 = 0; \quad 102) x^2 - 7x + 12 = 0;$$

$$103) x^2 + 19x + 90 = 0; \quad 104) x^2 + 16x + 48 = 0;$$

$$105) x^2 - 22x + 57 = 0; \quad 106) x^2 - 18x + 81 = 0;$$

- 107) $x^2 + x - 12 = 0$; 108) $x^2 - x - 42 = 0$;
 109) $x^2 + 5x - 6 = 0$; 110) $x^2 + 5x + 6 = 0$;
 111) $x^2 + 11x - 26 = 0$; 112) $x^2 - 2x - 63 = 0$;
 113) $x^2 - x = 56$; 114) $x^2 + 2x = 35$;
 115) $x^2 - 10x = 39$; 116) $x^2 - 9 = 8x$;
 117) $x(x - 5) = 36$; 118) $x - 7 = \frac{30}{x}$;
 119) $4x^2 - 8x - 12 = 0$; 120) $6x^2 - 36 - 11x = 19x$;
 121) $\frac{x-2}{x-5} = x - 2$; 122) $(x-5)(x-3) + x^2 - 15 = 0$.

G. Lösung durch Zerlegung in Faktoren.

- 123) $(x-4)(x-5) = 0$; 124) $(x+4)(x-7) = 0$;
 125) $(2x-5)(x-3) = 0$; 126) $\left(x + \frac{1}{2}\right)(7x-1) = 0$;
 127) $(x-7)(2x+5) = (3x-1)(x-7)$;
 128) $\left(1 - \frac{x}{3}\right)(5x-1) + 4x\left(1 - \frac{x}{3}\right)$;
 129) $(4-x)(5x+1) = (4-x)x$;
 130) $\left(4 - \frac{1}{x}\right)(2x-3) = 4x-1$;
 131) $(7-x)x = \left(1 - \frac{x}{7}\right)(3x+8)$;
 132) $\left(\frac{3}{x} + 5\right)(9x-1) = (3+5x) \cdot 4$;
 133) $\frac{x+11}{x-5} = \frac{x+11}{7x-1}$; 134) $\frac{\left(x + \frac{1}{3}\right)(5x-8)}{2} = \frac{3x+1}{10}$;
 135) $4\frac{1}{3} - x = (13-3x)(5x-7)$; 136) $(x-3a)(x-2b) = 0$;
 137) $(2x-a)(5x-3e) = 0$;

$$138) \left(2x - \frac{a}{3}\right) \cdot 4 = \left(2 - \frac{a}{3x}\right) (5x - 11);$$

$$139) \left(x - \frac{a}{3}\right) (x + e - f) + (3x - a) (2x - e + 2f) = 0;$$

$$140) (x - p)(4x - 5p) = x^2 - p^2.$$

H. Zerspaltung quadratischer Ausdrücke in zwei Faktoren ersten Grades.

Die folgenden Ausdrücke sollen in zwei Faktoren ersten Grades zerspalten werden:

$$141) x^2 + 7x + 12; 142) x^2 - 8x + 12; 143) x^2 + 9x + 20;$$

$$144) x^2 + x - 30; 145) x^2 - x - 30; 146) x^2 + 2x - 224;$$

$$147) x^2 - 7x - 260; 148) 2x^2 + 9x - 5; 149) 3x^2 - 25x + 28;$$

$$150) 4x^2 + 17x + 15; 151) 20x^2 + 23x - 21; 152) 6x^2 - 7x - 5;$$

$$153) 15x^2 + 23x - 28; 154) -63x^2 + 16x - 1;$$

$$155) 80x^2 - 52x + x; 156) x^2 + x + \frac{1}{4};$$

$$157) x^2 - \frac{9}{20}x + \frac{1}{20}; 158) x^2 - \frac{37}{28}x + \frac{3}{7};$$

$$159) x^2 + \frac{10}{3}x + 1; 160) 40x^2 - x - \frac{1}{20};$$

$$161) x^2 - (a + b)x + ab; 162) x^2 - 2px - 5qx + 10pq;$$

$$163) x^2 - 2ax + a^2 - 4b^2; 164) x^2 - \frac{5}{2}ax + a^2;$$

$$165) 4x^2 - 2bx + \frac{1}{2}cx - \frac{1}{4}bc; 166) 18x^2 - 2ex - \frac{e^2}{6}.$$

J. Die Koeffizienten der zu lösenden quadratischen Gleichung sind zum Teil irrational, komplex oder Buchstaben-Ausdrücke.

$$167) x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0; 168) x^2 + x\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0;$$

$$169) 9x^2 = 8x + 2\sqrt{2}; 170) x^2 - 3\sqrt{-1}x + 5 = 0;$$

$$171) \frac{-x + 3i}{5} - \frac{12}{ix} = i - 6; 172) 4x^2 + ix - 7 = 0;$$

$$173) \frac{x - \sqrt{5}}{x - \sqrt{2}} = \frac{5x}{2}; \quad 174) x^2 - 3x - 2ix\sqrt{3} = 1 - 3i\sqrt{3};$$

$$175) x^2 + 2ax + a^2 + 1 = 0; \quad 176) x(x - a) = b^2 - \frac{a^2}{4};$$

$$177) 4x^2 - 4x(\sqrt{3} + \sqrt{5}) = 45 - 10\sqrt{15};$$

$$178) x^2 - 2a\sqrt{2}x + 2a^2 - 3ib^2 = 0;$$

$$179) x^2 - 4ax - bx\sqrt{3} + 4ab\sqrt{3} = 0;$$

$$180) ix^2 - x = i^7; \quad 181) x^2 - 2ax - 2bx\sqrt{2} + b^2 + 2ab\sqrt{2} = 0.$$

K. x^2 als Unbekannte.

$$182) x^4 - 13x^2 + 36 = 0; \quad 183) x^2(x^2 - 90) + 729 = 0;$$

$$184) (4x^2 - 3)^2 + (8x^2 + 1)^2 = 82; \quad 185) x^2 + 2)(x^2 + 3) = 42;$$

$$186) (x^2 + 8)^2 + (x^2 + 1)^2 = 13^2; \quad 187) (x + 2)^4 + (x - 2)^4 = 626;$$

$$188) \frac{5}{2x^2} = (2x + i\sqrt{3})(2x - i\sqrt{3});$$

$$189) 24x^2 = (4x^2 + 5)(4x^2 - 20);$$

$$190) \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2} + \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2} = \frac{10}{3}; \quad 191) x^4 - a^2x^2 + b^4 = 0.$$

L. Ein x enthaltender Ausdruck als Unbekannte.

$$192) (9x)^2 - 2 \cdot (9x) = -1; \quad 193) 16x^2 - 4x = 6;$$

$$194) \frac{25}{x^2} - \frac{20}{x} = 12; \quad 195) \frac{1}{x^2 + 4x + 4} = \frac{6:5}{x + 2} + 19;$$

$$196) \frac{x - 4}{x + 5} + \frac{x + 5}{x - 4} = 2\frac{1}{6}; \quad 197) (3x - 2)^2 + \left(x - \frac{2}{3}\right) = 84;$$

$$198) (x^2 + 5x)^2 + x(x + 5) = 42;$$

$$199) \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4x + \frac{4}{x} = 12;$$

$$200) \frac{x^2 + x + 5}{x^2 + x - 2} + \frac{x^2 + x - 5}{x^2 + x - 4} = 10;$$

$$201) 2(x + 3)(x + 4) = (x^2 + 7x)(x^2 + 7x - 3).$$

M. Symmetrische Gleichungen vierten Grades.

$$202) 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0;$$

$$203) x^4 - \frac{25}{4}x^3 + \frac{21}{2}x^2 - \frac{25}{4}x + 1 = 0;$$

$$204) x^4 - 2\frac{2}{3}x^3 - 2x + 2\frac{2}{3}x + 1 = 0;$$

$$205) x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0;$$

$$206) 3x^4 - 11x^3 - 6x^2 + 11x + 3 = 0;$$

$$207) x^4 - 3x^2 + 1 + \frac{x}{2}(x^2 + 1) = 0;$$

$$208) 6x^4 - 17x^3 - 17x + 6 + \frac{62}{3}x^2 = 0;$$

$$209) 10[x^4 + 1 + x^2(2 + 3\sqrt{5})] = (25 + 12\sqrt{5})x(x^2 + 1);$$

$$210) x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0;$$

$$211) x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0.$$

N. Gleichungen mit Wurzelzeichen, die auf Gleichungen ersten Grades führen.

$$212) \sqrt{x} - 4 = 0; \quad 213) 14\sqrt{x} - 5 = 0;$$

$$214) 1 + \sqrt{x^2 + x - 11} = x; \quad 215) \sqrt{x^3 - 7x + 10} = 5 - x;$$

$$216) 3x - \sqrt{9x^2 - 7x - 1} = 2;$$

$$217) (4 + \sqrt{x})(5 + \sqrt{x}) = x + 38;$$

$$218) \sqrt{x+4} \cdot \sqrt{x+11} = x + 7;$$

$$219) \sqrt{(x+3)(2x-1)} = x\sqrt{2} + \sqrt{2};$$

$$220) \sqrt{9+7\sqrt{x-2}} = 4; \quad 221) \sqrt{x+9} = \sqrt{x+1};$$

$$222) \sqrt{8x+7} = 1 + 2\sqrt{2x};$$

$$223) \sqrt{6x-5} + \sqrt{24x+1} = \sqrt{2(27x-9)};$$

$$224) \sqrt{ex+f} + \sqrt{ex+g} = \sqrt{4ex+h}.$$

O. Gleichungen mit Wurzelzeichen, die auf Gleichungen zweiten Grades führen.

225) $\sqrt{x+16} = x-4$; 226) $6\sqrt{1+3x}-19 = x$;

227) $x + \sqrt{x+6} = 14$; 228) $\sqrt{2x+1} - x = \frac{1}{2}$;

229) $\sqrt{10x-34} + 2\sqrt{x+4} = \sqrt{2(3x+35)}$;

230) $\sqrt{27-x} = \sqrt{x+2} + \sqrt{3x+3}$;

231) $\sqrt{x} = 8 - \frac{15}{\sqrt{x}}$; 232) $\sqrt{\frac{x-7}{x-19}} = \sqrt{x-19}$;

233) $\sqrt{2}\sqrt{x-1} + \sqrt{34-x} = 9$;

234) $\sqrt{18x+5} - 2\sqrt{3x} = \sqrt{2}$;

235) $\sqrt{4x+13} - \sqrt{15-2x} = \sqrt{2(3x-7)}$;

236) $\sqrt{\frac{x}{2}-8} + \sqrt{\frac{5x}{3}+9} = \sqrt{\frac{10x}{3}+1}$;

237) $\sqrt{4x-5} + \sqrt{2x-9} = 4$;

238) $\sqrt{x+11} + \sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^2 + 5x + 50} = 9$;

239) $\sqrt{\frac{7-2x}{7+2x}} + \sqrt{\frac{7+2x}{7-2x}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$;

240) $\sqrt{ax+2} + \sqrt{bx+2} = \sqrt{cx+2}$.

P. Symmetrische Gleichungen von höherem als dem vierten Grade.

241) $3x^5 - 4x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 3 = 0$;

242) $x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$;

243) $12(1-x^5) - 8x(1-x^3) + 45x^2(x-1) = 0$;

244) $\frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{2}x^5 - x^4 + x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = 0$;

245) $x^5 = 1$; 246) $x^5 = -1$;

247) $x^6 - 1 [= (x^3+1)(x^3-1)] = 0$;

$$248) x^8 - 1 [= (x^4 + 1)(x^4 - 1)] = 0;$$

$$249) x^{10} - 1 [= (x^5 + 1)(x^5 - 1)] = 0;$$

$$250) x^{12} - 1 [= (x^3 - 1)(x^3 + 1)(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)] = 0.$$

Q. Eingekleidet.

251) Multipliziert man die Hälfte einer gesuchten Zahl mit dem fünften Teile von ihr, so erhält man 40.

252) Welche zwei Zahlen sind gleich ihren reziproken Werten?

253) Welche zwei Zahlen sind gleich ihren negativen reziproken Werten?

254) Die Summe der reziproken Werte zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist gleich $\frac{9}{20}$.

Wie heissen die beiden Zahlen?

255) Die Zahl 1 in zwei irrationale Faktoren zu zerlegen, deren Differenz 2 ist.

256) Welche Zahl ist um $2\frac{2}{3}$ grösser als ihr reziproker Wert?

257) Welche irrationale Zahl ist um 3 kleiner als ihr Quadrat?

258) Welche Zahl übertrifft ihre Quadratwurzel um $\frac{3}{4}$?

259) Die Summe der Quadrate dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen beträgt 50. Wie heisst die kleinste der drei Zahlen?

260) Die Seite eines Quadrats ist 3mal so gross als die eines andern Quadrats, während sein Inhalt um

32 Quadratzentimeter grösser ist, als der Inhalt des andern. Wie lang ist die Seite des ersten Quadrats?

261) In einem rechtwinkligen Dreieck ist die längere Kathete um 1 Meter kürzer als die Hypotenuse, aber um 17 Meter länger als die kürzere Kathete. Wie lang ist die längere Kathete?

262) Wie gross ist der Radius eines Kreises, wenn er um 23 Zentimeter kürzer ist als eine Sehne, die 7 Zentimeter vom Zentrum entfernt ist?

263) In einem rechtwinkligen Dreieck ist die eine Kathete gleich dem ihr nicht anliegenden Höhenabschnitt. Wie lang ist dieselbe, wenn die Hypotenuse 1 Meter lang ist?

264) Wie gross ist der Durchmesser eines Kreises, wenn er 2 Zentimeter länger ist, als eine Sehne, deren Zentralabstand $\frac{9}{82}$ des Durchmessers ist?

265) Auf einem Strahle liegen, der Reihe nach, drei Punkte A, B, C. Wie weit ist A vom Halbierungspunkt der Strecke BC entfernt, wenn letztere 5 Zentimeter lang ist, und die mittlere Proportionale zwischen AB und AC 6 Zentimeter beträgt?

266) Welche Kantenlänge hat ein Würfel, dessen Volumen um 19 Kubikzentimeter wächst, wenn seine Kante um 1 Zentimeter wächst?

267) Ein rechteckiges Gebäude hat 70 Meter Umfang. Es ist von einem Gitter umgeben, das an allen 4 Seiten gleichen Abstand vom Gebäude hat. Das Gitter umfasst ein Terrain, das 74 Quadratmeter grösser ist, als das vom Gebäude eingenommene Terrain. Welchen Abstand hat das Gitter?

268) Wenn man bei einem quadratischen Stück Papier an jeder Ecke ein Quadrat abschneidet, dessen Seite 1 Zentimeter lang ist, und dann die 4 aussen

entstandenen Rechtecke rechtwinklig umkniff, so entsteht ein Kästchen von 25 Kubikzentimeter Volumen. Wie lang war jede Seite des Stückes Papier?

269) Wie gross ist der Inhalt eines Quadrats, bei welchem die Diagonale 1 Zentimeter länger ist als die Seite?

270) Wieviel Punkte enthält eine Punktgruppe, bei welcher 300 Verbindungslinien entstehen, wenn man auf alle mögliche Weise immer zwei Punkte miteinander verbindet?

271) Mit einem Hebel, dessen Arme verschieden lang waren, wurde das Gewicht eines Körpers dadurch bestimmt, dass man ihn in jede der beiden Wagschalen legte und jedesmal mit Gewichten in der andern Wagschale das Gleichgewicht herstellte. So wog der Körper scheinbar zuerst $9\frac{3}{8}$ Kilo, dann aber $10\frac{5}{16}$ Kilo. Wieviel wog er in Wirklichkeit?

272) Nach t Sekunden ist ein mit der Anfangsgeschwindigkeit von c Metern vertikal in die Höhe geworfener Stein in einer Höhe von $\left(c t - \frac{1}{2} g t^2\right)$ Metern, wo $g = 9,8$ ist. Nach wieviel Sekunden ist derselbe 9,6 Meter hoch, wenn er mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 22 Metern in die Höhe geschleudert wurde?

273) Ein mathematisches, p Meter langes Pendel braucht zu einer kleinen Schwingung nahezu \sqrt{p} Sekunden. Wie lang war demnach ein Pendel, dessen Schwingungszeit um $\frac{1}{5}$ Sekunde wuchs, als es um 36 Zentimeter länger gemacht wurde?

274) Wie tief müsste ein Brunnen sein, bei dem

man einen hineingeworfenen Stein erst nach $6\frac{34}{175}$ Sekunden auf den Grund schlagen hört? ($g = 9,8$; Geschwindigkeit des Schalls $\frac{1}{3}$ Kilometer pro Sekunde.)

275) An einem Vereins-Ausflug nahmen zwei Damen mehr teil als Herren. Um die Kosten zu bestreiten, musste jeder Herr 2 Mark mehr beisteuern, als jede Dame. So kam es, dass die Damen zusammen 80 Mark, die Herren zusammen 108 Mark zu zahlen hatten. Wieviel Herren und wieviel Damen nahmen an dem Ausflug teil?

276) Eine Anzahl von Herren hatte für die Benutzung eines Billards zusammen 1 Mark 20 Pfennig zu zahlen. Wäre ein Herr mehr gewesen, hätte jeder 4 Pfennige weniger beizusteuern gehabt. Wieviel Herren waren es?

277) Wieviel Tage reicht ein Kaffee-Vorrat, von dem zwei Familien zehren, wenn angenommen wird, dass der Vorrat 10 Tage bzw. 40 Tage länger reichen würde, wenn nur die eine oder nur die andere Familie davon zehrte?

278) Durch die Telephon-Leitungen einer kleinen Stadt waren höchstens 435 Gesprächs-Verbindungen innerhalb der Stadt möglich. Wieviel Einwohner hatten Telephon-Anschluss?

279) Bei einem Schulausfluge der Primen, Sekunden und Tertien hatte jeder Primaner soviel beizusteuern, wie ein Sekundaner und ein Tertianer zusammen. Die Sekunden zählten 8, die Tertien 18 Schüler mehr als die Primen. Der Gesamtbeitrag der Primen betrug

36 Mark, der der Sekunden 40 Mark, der der Tertien 30 Mark. Wieviel Primaner waren vorhanden?

280) Ein Hund verfolgt eine Katze, die ihm 20 Meter vorauf ist. Da der Hund zu einem Meter $\frac{1}{10}$ Sekunde weniger braucht als die Katze, so holt er sie in 20 Sekunden ein. Wieviel Meter hat der Hund laufen müssen?

281) Aus zwei benachbarten Orten gingen zwei Freunde sich entgegen. Sie waren beide um 8 Uhr aufgebrochen und trafen sich um 10 Uhr 23 Minuten. Der eine brauchte zu einem Kilometer 2 Minuten länger als der andere. Die Entfernung der beiden Orte betrug 24 Kilometer. Wo lag der Ort der Begegnung?

282) Zwei Spaziergänger trennten sich bei einer Wegkreuzung. Der eine geht südwärts, der andere westwärts. Der eine wandert aber $\frac{1}{4}$ mal so schnell als der andere. Dadurch kommt es, dass sie nach 10 Minuten genau ein Kilometer in der Luftlinie von einander entfernt sind. Wieviel Minuten braucht jeder zu einem Kilometer?

§ 22. Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

A. Die eine Gleichung ist ersten Grades.

- 1) $\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 36 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 58 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} xy = 40 \\ x - y = 3 \end{cases}$;
 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 233 \\ x - y = 5 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} xy - 5x = 1 \\ 7x - y = 1 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x^2 + 4xy = 57 \\ x + y = 7 \end{cases}$;
 7) $\begin{cases} 3x + 5y = 35 \\ x^2 + 2y^2 = xy + 8x - y + 13 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} \frac{5x - y}{4} = \frac{7}{4x + 3y} \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

$$9) \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 3 \\ (x+y)^2 = 200 - x \end{cases}; \quad 10) \begin{cases} \frac{3x+y}{3x-y} = \frac{x+5}{y+2}; \\ 2x-y = 1 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x:y = 2:3 \\ x^2 + y^2 = 5(x+y) + 2 \end{cases}; \quad 12) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{x}{y} = \frac{10}{3}; \\ 4x - 7y = 5 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} \frac{4x+5y}{9} + \frac{7x-y}{6} = \frac{x+2y+1}{2} \\ \frac{7x-y}{x+y+1} - \frac{x+2}{2x+y} = 1. \end{cases}$$

B. Elimination der quadratischen Glieder.

$$14) \begin{cases} x+y+2y^2 = 11 \\ 3x-2y-2y^2 = -9 \end{cases}; \quad 15) \begin{cases} 3(x^2-y^2) = 2x+17 \\ x^2-y^2+x+y = 18 \end{cases};$$

$$16) \begin{cases} xy - x = 12 \\ xy + 3y - 35 = 0 \end{cases}; \quad 17) \begin{cases} x(y-4) = 14 \\ y(x+1) = 33 \end{cases};$$

$$18) \begin{cases} (x+1)(y+2) = 28 \\ (x+3)(y+4) = 54 \end{cases}; \quad 19) \begin{cases} (x-1)(y+5) = 80 \\ (x+4)(y-2) = 39 \end{cases};$$

$$20) \begin{cases} 4xy - 5x^2 - 2x + y = 12 \\ x(4y - 5x) + x - y = 13 \end{cases};$$

$$21) \begin{cases} x^2 + y^2 = 8y + 1 - 2xy \\ 2(x+y)^2 = 10x + 9y + 3 \end{cases};$$

$$22) \begin{cases} x^2 + 6xy + 9y^2 = 50(x+y) \\ \frac{x+3y}{4x+8} = \frac{25}{x+3y} \end{cases};$$

$$23) \begin{cases} 2x^2 + 6xy + 8y^2 = 5x + 11 \\ 3x^2 + 9xy + 12y^2 = 9y + 15 \end{cases};$$

C. Einführung einer neuen Unbekannten.

$$24) \begin{cases} (x+y)^2 + (x+y) = 12 \\ 3x^2 + y^2 = x + y + 4 \end{cases};$$

- $$25) \begin{cases} 5x - 10y + (x - 2y)^2 = 6 \\ xy + x + y = 7; \end{cases}$$
- $$26) \begin{cases} (x + y - 1)(x + y - 2) = 12 \\ 2x^2 + y^2 = (y - x)(y + x + 1); \end{cases}$$
- $$27) \begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + 5 \cdot \frac{x}{y} = 14; \\ x = y^2 + 1 \end{cases} \quad 28) \begin{cases} 5 \frac{x}{y} + 3 \frac{y}{x} = 8; \\ x^2 + y = x + 4 \end{cases}$$
- $$29) \begin{cases} 4x^2 - 9xy + 5y^2 = 0 \\ 7x^2 - 3xy = 3x + 2y - 1; \end{cases}$$
- $$30) \begin{cases} \frac{x+3}{y+3} + \frac{x+2}{y+2} = 4\frac{1}{3}; \\ x^2 - 4xy = 5y^2 \end{cases}$$
- $$31) \begin{cases} (2x + 3y)^2 + 6x + 9y = 180 \\ x^2 + y^2 + xy + x + y = 24. \end{cases}$$

D. $x + y$ und $x - y$ als Unbekannte.

- $$32) \begin{cases} x^2 + y^2 = 50; \\ xy = 7 \end{cases}; \quad 33) \begin{cases} x^2 - y^2 = 5; \\ xy = 6 \end{cases};$$
- $$34) \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 8(x + y) - 1; \\ xy = x + y + 1. \end{cases};$$
- $$35) \begin{cases} (x - y)^2 + 3(y - x) = 4; \\ x + y + 2xy = 49 \end{cases};$$
- $$36) \begin{cases} x^2 + y^2 + xy + x + y = 17 \\ x^2 + y^2 - 3xy + 2x + 2y = 9; \end{cases}$$
- $$37) \begin{cases} 1 + \frac{y^2}{x} = \frac{13}{3} \left(1 + \frac{y}{x}\right); \\ 4x + 4y = 3xy + 9 \end{cases}; \quad 38) \begin{cases} x + xy + y = 5 \\ x^2 + x^2y^2 + y^2 = 9; \end{cases}$$
- $$39) \begin{cases} 3x(1 + x) + 3y(1 + y) = 54; \\ 2x + 2y + xy = 16 \end{cases};$$
- $$40) \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 + 3(x^2 + y^2)(x + y) = 70; \\ (x + y)^2 - (x + y) = 2xy + 2 \end{cases};$$

- 41) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 28 \\ x + y = 4 \end{cases}$; 42) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 19 \\ x - y = 1 \end{cases}$;
- 43) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 82 \\ x - y = 2 \end{cases}$; 44) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 34 \\ x + y = 2 \end{cases}$;
- 45) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{3}{xy} + 1 \end{cases}$; 46) $\begin{cases} x^5 + y^5 = 64 \\ x + y = 4 \end{cases}$;
- 47) $\begin{cases} x^5 - y^5 = 211 \\ x - y = 1 \end{cases}$; 48) $\begin{cases} x^5 + y^5 = 11(x + y) \\ x + y = 3 \end{cases}$;
- 49) $\begin{cases} x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 481 \\ x^2 + xy + y^2 = 37 \end{cases}$;
- 50) $\begin{cases} x + y = 7 \\ (x^3 + y^3)(x^2 + y^2) = 2275 \end{cases}$.

E. Absondern eines gemeinsamen Faktors auf beiden Seiten der einen Gleichung.

- 51) $\begin{cases} (3x - y)(3x + y) = 35 \\ (x - 2y)(x - 5y) = 0 \end{cases}$;
- 52) $\begin{cases} (x + y)(x - 2y) = (x^2 - y^2) \cdot \frac{1}{4} \\ 5x = 4y^2 - 1 \end{cases}$;
- 53) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)(3x + 1) \\ x^2 - y^2 + 2xy + 1 = 0 \end{cases}$;
- 54) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 7y - 1 \\ x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + y^2 + 10) \end{cases}$;
- 55) $\begin{cases} x^4 = y^4 + 7(x^2 + y^2) \\ xy = 12 \end{cases}$;
- 56) $\begin{cases} (x - y)^2 - 9 = (x - y - 3)(x + 2y) \\ x^2 - 4y^2 = 9 \end{cases}$;
- 57) $\begin{cases} x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 21(x^2 + xy + y^2) \\ x + y = 3 \end{cases}$.

F. Unbekannte unter Quadratwurzelzeichen.

$$58) \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{1}{5}(x - y); \\ xy = 36 \end{cases}$$

$$59) \begin{cases} x + y + 2\sqrt{x+y} = 8; \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}; \quad 60) \begin{cases} x^2 - y + \sqrt{x^2 - y} = 20; \\ x^4 - y^2 = 544 \end{cases}$$

$$61) \begin{cases} \sqrt{3x+13} + \sqrt{4y+1} = 7; \\ x = y - 1 \end{cases}$$

$$62) \begin{cases} (\sqrt{x^2 + 2y^3} - xy) \sqrt{x^2 + 2y^3} = 3; \\ (\sqrt{x^2 + 2y^3} + xy) \sqrt{x^2 + 2y^3} = 15; \end{cases}$$

$$63) \begin{cases} x^2 - y \sqrt{xy} = 14 \\ y^2 - x \sqrt{xy} = -7 \end{cases}$$

G. Buchstaben.

$$64) \begin{cases} x - y = d \\ xy = p \end{cases}; \quad 65) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ xy = p \end{cases}; \quad 66) \begin{cases} x - y = d \\ x^2 - y^2 = e \end{cases};$$

$$67) \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = a; \\ xy + x + y = b \end{cases}; \quad 68) \begin{cases} x : y = e^2 \\ xy = f^2 \end{cases};$$

$$69) \begin{cases} x : y = q \\ x^2 + 2y^2 = b \end{cases}; \quad 70) \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3a^2; \\ x + y = 3(x - y) \end{cases};$$

$$71) \begin{cases} x^3 + y^3 = k; \\ x + y = s \end{cases}; \quad 72) \begin{cases} x^3 - y^3 = e \\ x - y = d \end{cases}; \quad 73) \begin{cases} x^4 + y^4 = g; \\ x + y = s \end{cases};$$

$$74) \begin{cases} x^2 + y^2 = g \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = h \end{cases}; \quad 75) \begin{cases} x - y = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \\ x^2 + y^2 = q \end{cases}$$

H. Mehr als zwei Unbekannte.

$$76) \begin{cases} x^2 + 2y^2 - z^2 = 5 \\ 2x + y + z = 6 \\ x + 4y - z = 5 \end{cases}; \quad 77) \begin{cases} xy + xz + yz = 11 \\ x + y = z \\ y + z = 5 \end{cases};$$

$$78) \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ y^2 + z^2 = 25; \\ z^2 + x^2 = 20 \end{cases} \quad 79) \begin{cases} xy = 12 \\ zx = 15; \\ yz = 20 \end{cases} \quad 80) \begin{cases} x(y+z) = 8 \\ y(z+x) = 18; \\ z(x+y) = 20 \end{cases}$$

$$81) \begin{cases} x + y = \frac{1}{15} xyz \\ z + x = \frac{11}{120} xyz; \\ y + z = \frac{13}{120} xyz \end{cases} \quad 82) \begin{cases} x + y + z = 19 \\ xz - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 133 \end{cases};$$

$$83) \begin{cases} (x+y)(x+z) = 56 \\ (x+y)(y+z) = 49; \\ (x+z)(y+z) = 56 \end{cases} \quad 84) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 21 \\ xy + xz + yz = 14; \\ x + y = z - 1 \end{cases}$$

$$85) \begin{cases} x + y = 11 \\ z + u = 10 \\ xy = zu \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 125 \end{cases};$$

$$86) \begin{cases} x^2 + xy - z^2 + u^2 = 10 \\ x + y + z + u = 10 \\ 2x + 3y - z - u = 1; \\ x + y + 5z - 4u = 2 \end{cases};$$

$$87) \begin{cases} xy + xz + xu + yz + yu + zu = 41 \\ x + y = 3 \\ x + z = 4 \\ x + u = 6 \end{cases};$$

$$88) \begin{cases} xy + zu = 17 \\ xz + yu = 13 \\ xu + yz = 11 \\ x + y + z + u = 11 \end{cases}; \quad 89) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 = 19 \\ x + y + z = u + v - 1 \\ x + v = z + u \\ x + y + v = 5 \\ y + z = v \end{cases}.$$

J. Eingekleidet.

90) Wie heissen die beiden Zahlen, die das Produkt 1000 und den Quotienten $\frac{5}{8}$ haben?

91) Die Quadratsumme zweier gesuchter Zahlen beträgt 137, während die Quadratsumme der ihnen in der natürlichen Zahlenreihe folgenden Zahlen 169 beträgt.

92) Ausser Null und Null giebt es noch 2 Paare irrationaler Zahlen, so dass Summe, Produkt und Differenz der Quadrate eines solchen Paares denselben Wert haben. Wie heissen diese Paare irrationaler Zahlen?

93) Die Zahl 313 in zwei Summanden so zu zerlegen, dass die Summe der Quadratwurzeln aus diesen Summanden 25 beträgt.

94) Wie heisst das erste Glied einer arithmetischen Reihe von fünf Gliedern, wenn die Summe aller fünf Glieder 40 und ihr Produkt 12320 beträgt?

95) Bei einer Proportion ist die Summe der inneren Glieder 16, die der äusseren 19, während die Summe der Quadrate aller vier Glieder 425 beträgt. Wie heisst die Proportion?

96) Bestimme die dreiziffrige Zahl, bei der die Summe der Quadrate der Ziffern 29 beträgt, bei der die erste Ziffer der 8. Teil der aus den beiden andern Ziffern bestehenden Zahl ist, und bei der auch die dritte Ziffer der 8. Teil der aus den beiden andern Ziffern bestehenden Zahl ist.

97) Eine Zahl, die keine anderen Teiler als 2 und 3 hat, besitzt 12 Teiler, während ihr Quadrat 35 Teiler besitzt. Wie heisst die Zahl? (Vgl. § 14.)

98) Vermehrt man bei einem Bruche den Zähler um seine Quadratwurzel und auch den Nenner um seine Quadratwurzel, so entsteht ein neuer Bruch, der sich zum alten verhält, wie 9 zu 8. Vermindert man aber in derselben Weise Zähler und Nenner, so entsteht ein neuer Bruch, der sich zum alten verhält wie 3 zu 4. Wie heisst der ursprüngliche Bruch?

99) Wie lang sind die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, das 36 Meter Umfang und 54 Quadratmeter Inhalt hat?

100) Auf einer geraden Linie liegen der Reihe nach 4 harmonische Punkte A, B, C, D. Die mittlere Strecke BC ist 1 Zentimeter lang. Wie lang sind AB und CD, wenn beide sich wie 3 zu 2 verhalten?

101) In einem Dreieck ist die eine Seite 10 Zentimeter, die zugehörige Schwerpunktstransversale 5 Zentimeter lang und die Halbierungslinie des gegenüberliegenden Winkels $\frac{24}{7} \sqrt{2}$ Zentimeter lang. Wie gross sind die beiden andern Seiten?

102) Zwei Polygone haben zusammen 12 Seiten und 19 Diagonalen. Wieviel Ecken haben sie?

103) Bei einer rechtwinkligen Kiste ist die Länge $\frac{6}{5}$ von der Summe der Breite und Höhe, die räumliche Diagonale 7 Zentimeter lang und die Gesamtoberfläche 72 Quadratzentimeter gross. Wie lang sind die Kanten?

104) Eine Kugel rollt auf einer 54 Meter langen schiefen Ebene herab und legt dabei in der ersten Sekunde $1\frac{1}{2}$ Meter, in der zweiten Sekunde $4\frac{1}{2}$ Meter,

in der dritten Sekunde $7\frac{1}{2}$ Meter u. s. w. zurück. Wie lange rollt sie und wieviel Meter in der letzten Sekunde?

105) Auf einer Chaussée, die 22 Kilometer lang ist, gehen sich zwei Touristen entgegen. Sie sind gleichzeitig aufgebrochen und begegnen sich nach zwei Stunden. Da der eine aber schneller geht, als der andere, so braucht der eine zu dem ganzen Wege 44 Minuten weniger als der andere. In wieviel Minuten legt jeder das Kilometer zurück?

106) Auf den Schenkeln eines rechten Winkels beginnen zwei Punkte im Momente, wo sie 13 Meter von einander entfernt sind, eine Bewegung auf den Scheitel zu. Der eine Punkt braucht zu einem Meter $6\frac{2}{3}$ Sekunden, der andere 1 Minute. Nach Verlauf einer Minute haben sie eine direkte Entfernung von 10 Metern. Wie weit waren sie ursprünglich vom Scheitel entfernt?

107) Jemand verkauft eine Anzahl Pferde zu gleichem Preise. Er nimmt im ganzen 1800 Mark ein. Später verkaufte er einmal 1 Pferd weniger, und für jedes bekam er 25 Mark mehr, als das erste Mal, wodurch er wieder 1800 Mark einnahm. Wieviel Pferde verkaufte er das erste Mal und zu welchem Preise?

108) Jemand kauft für 60 Mark Wein ein. Für dasselbe Geld hätte er 10 Flaschen mehr erhalten, wenn jede Flasche 20 Pfg. billiger gewesen wäre. Wieviel Flaschen kauft er ein und zu welchem Preise?

109) Wieviel Volt Spannung und wieviel Ampère Stärke hat ein elektrischer Strom, der 21 Ohm Widerstand hat und einen Effekt von 525 Watts leistet? (1 Watt = 1 Volt-Ampère.)

110) Ein galvanischer Strom hat 120 Volt Spannung. Als der Widerstand um 1 Ohm erhöht wurde,

sank die Stromstärke um 4 Ampère. Wieviel Widerstand und welche Stärke hatte der Strom ursprünglich?

111) Zur Fahrt auf einer 60 Kilometer langen Eisenbahnstrecke wurden im ganzen 100 Fahrkarten gelöst, und zwar 60 mehr dritter Klasse als erster Klasse. Der Billeteur nahm für die Fahrkarten erster Klasse 60 Mark ein, für die zweiter Klasse 90 Mark, für die dritter Klasse 210 Mark. Zwei Fahrkarten zweiter Klasse kosten soviel, wie eine erster und eine dritter Klasse zusammen. Wieviel kostet eine Fahrkarte jeder Klasse pro Kilometer?

VI. Abschnitt.

Rechnungsarten dritter Stufe.

§ 23. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten.

Berechne:

- 1) 3^5 ; 2) 2^{10} ; 3) $\left(1\frac{1}{2}\right)^6$; 4) 0^{17} ; 5) 1^{1897} ;
 6) 1897^1 ; 7) $(-1)^3$; 8) $(-1)^{19}$; 9) $(-1)^{20}$;
 10) $(-1)^{21}$; 11) $(-1)^{22}$; 12) i^6 ; 13) $(-2)^6$;
 14) $(-3)^5$; 15) $(-10)^7$; 16) $\left(-\frac{3}{4}\right)^5$; 17) $(-0,1)^4$;
 18) $(\sqrt{2})^8$; 19) $(\sqrt{0,5})^6$; 20) $(\sqrt{a})^{4p}$; 21) $(-1)^{2n+1}$;
 22) i^{4n+2} ; 23) i^{4n+3} ; 24) $\frac{1}{4n+3}$;
 25) 2^n für $n = \infty$; 26) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ für $n = \infty$;
 27) $2 \cdot 5^3 - 3 \cdot 2^4 + (5 \cdot 3)^2$; 28) $(3^2 + 1)^6$;
 29) $(2^1 - 1^2)^{47}$; 30) 5^{2^2-2} ; 31) $(3^4 - 1) : 2^4$;

32) $(4^3 + 4^2) : (3^4 - 1)$; 33) $(-3)^{7-2^2}$;

34) $\left(3 \frac{1}{3}\right)^4 - \frac{25}{27} + (5^2 - 2^2) : (2^2 + 2^1 + 1)$;

Vereinfache:

35) $a^5 \cdot a^2 \cdot a^3$; 36) $a^{13} \cdot a^4 : a^7 : a^8$; 37) $a^9 : a^5 + b^8 : b^4$;

38) $a^p \cdot a^q : a^r$; 39) $a^{4b+3} \cdot a^{c-3}$; 40) $d^e \cdot d$;

41) $d^e : d$; 42) $a^b + c : a^{b-c}$; 43) $\frac{a^b + c}{a^b}$;

44) $\frac{b^p - q}{b^q}$; 45) $\frac{c^{2p+4q}}{c^{2p}}$;

46) $\left(\frac{4}{5} a^2 b\right) \left(\frac{15}{8} a^3 b^2\right) \left(\frac{2}{3} a b^3\right)$;

47) $(p^2 q) (p^7 q^4) (p^3 q^3) : (p q)^5$;

48) $\frac{a^{2p+q} \cdot a^{p+3q}}{3p+4q}$; 49) $\frac{b^{v+2} \cdot b^{3v-5} \cdot b^6}{b^{4v-3} \cdot b^5}$;

50) $\frac{c^{3p+q} \cdot c^{6q}}{c(3p+7q)}$;

51) $\frac{a^{4m-n} \cdot b^{7n} \cdot c^{5m+4n}}{a^{m-n} \cdot b^{m+2n} \cdot c^m} : \frac{a^{3m} \cdot b^{5n+1} \cdot c^{4m+1}}{b^{2n} \cdot c^{4n}}$;

52) $\frac{(a-b)^{3p+q}}{(a-c)^{2p-q}} \cdot \frac{(a-c)}{(a-b)^{3p}} : (a-b)$;

53) $\frac{x^n - y^n}{x-y}$; 54) $\frac{x^{2n} - y^{2n}}{x+y}$;

55) $\frac{x^{2n+1} + y^{2n+1}}{x+y}$; 56) $\frac{x^{2n} - y^{2n}}{x^n - y^n}$;

57) $\frac{x^{3n} + y^{3n}}{x^n + y^n}$; 58) $\frac{x^{4n} - y^{4n}}{x^n + y^n}$;

59) $\left(2 \frac{1}{2}\right)^{2p} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{2p} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2p}$;

60) $(4^n \cdot 25^n) : 100^n$;

61) $8^m \cdot (125)^m \cdot 2^m \cdot (50)^m$;

62) $8^m : 2^{3m}$;

63) $(4^3)^{2n} - (4^2)^{3n}$;

64) $(a^2 b c)^5 (a^2 b c)^5 (a b^2 c)^3$;

65) $\overline{(a + 3b)^{2n+1}}^{2n+1} : (a + 3b)^{4n(n+1)}$;

66) $\frac{(a^2 - b^2)^{a-b}}{(a+b)^{a-b}}$; 67) $\frac{(2a^2b^3c)^5}{(3abc^2)^8} : \frac{(4a^3bc)^3}{(9a^2bc)^4}$;

68) $\frac{a^3}{p^5} : \frac{a^2}{p^8}$; 69) $\frac{1}{a^n} - \frac{1}{a^{n-1}}$; 70) $\frac{1-a^2}{a^n} + \frac{1}{a^{n-2}}$;

71) $\frac{3 + 5a^5}{a^4} + \frac{4a + 6a^6}{a^5} - \frac{7a^2 + 11a^7}{a^6}$;

72) $(a^2b + 5ab^2 - 3a^3)ab^2 - a^3(b^3 + 3ab^2)$;

73) $(7a^{n+3} + 6a^{n+2} - 5a^{n+5}) : a^{n+1}$;

74) $\overline{(a^2b^3c^4)^n + (abc)^{n+1}} : (a^n b^{n+1} c^{n+1})$;

75) $(a^p + a^5)(a^{p-5} - a)$; 76) $(a^{2p} + a^p b^p + b^{2p})(a^p - b^p)$;

77) $(a^n + 1)^2$; 78) $(a^3 + 3a)^2$; 79) $\left(x^p + \frac{1}{x^p}\right)^2$;

80) $\left(a - \frac{1}{a^m}\right)^3$; 81) $\frac{(a^2 + 4ab + 4b^2)^x}{(a + 2b)^x}$;

82) $\frac{a^v + a^w}{a^v - a^w} + \frac{a^v - a^w}{a^v + a^w} - \frac{a^{2v} + (a^2)^w}{(a^v)^2 - a^{2w}}$.

Berechne:

83) 9^0 ; 84) 9^{-1} ; 85) 9^{-2} ; 86) $2^{-2} \cdot 5 + 2^{-3} \cdot 3$;

87) $(0,1)^{-2}$; 88) $7 : 7^{-1}$; 89) $25^{-2} \cdot 4^{-3}$;

90) $1 : 3)^{-4} + 16^0$; 91) $(-1)^0 + (-1)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$;

92) $10^3 \cdot 5^1 \cdot 3^0 \cdot 4^{-1} \cdot 6^{-2}$;

93) $3 \cdot 10^0 + 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 10^{-3}$;

Schreibe mit positiven Exponenten:

94) $(a:b)^{-n}$; 95) $\frac{a}{x-4}$; 96) $\frac{7a^{-3}b^{-4}}{5c^{-5}d^{-6}e^8}$

97) $\left(\frac{1}{a+2a^{-1}}\right)^{-1}$; 98) $\frac{3abc}{a^{-2}b^{-4}} + \frac{a^{-5}b^{-6}c}{a^{-8}bc^{-1}}$.

Vereinfache:

- 99) $a^{2p-1} : a^{-1} + b^{3v-5} : b^{-5}$;
 100) $(a:b)^{-2} \cdot (b:c)^{-3} \cdot (c:a)^{-4}$;
 101) $(a^2 b^3)^{-4} : (a^{-3} b^{-4})^3$; 102) $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-3} \cdot \frac{(a^2-b^2)^3}{(a-b)^6}$;
 103) $(4 a b^2 c^{-1} + 5 a^{-1} b c) : a^{-1} b$;
 104) $(a^{-4} - b^{-4}) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$;
 105) $\frac{a^{2n} + a^n b^{-m} - 6 b^{-2m}}{a^n - 2 b^{-m}}$;
 106) $(a^{-3})^{-4} + (a^{-2})^{-6}$;
 107) $\left[(a^2)^{-5} \right]^{-3} - \left[(a^{-10})^{-1} \right]^3$.

Löse die Gleichungen:

- 108) $x + 5x^{-1} = 6$; 109) $(x+2)^{-2} = (9x-2)^{-1}$;
 110) $(3+x^{-1})(5-4x^{-1}) = 5 - (x-1)^2$.

§ 24. Wurzeln.

Berechne oder vereinfache:

- 1) $\sqrt[3]{a^3} - \sqrt[5]{a^5} + \sqrt[6]{b^6}$; 2) $\sqrt[4]{a^4} + \left(\sqrt[5]{a-b}\right)^5$;
 3) $\sqrt[m]{a^2-b^2} : \sqrt[m]{a-b}$; 4) $\left(\sqrt[n]{a^v b^v} \cdot \sqrt[n]{a b}\right)^n$;
 5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \sqrt[3]{64} : 2^6$; 6) $\sqrt[10]{1024} \cdot \sqrt[6]{729}$;
 7) $\sqrt[3]{1:8}$; 8) $\sqrt[4]{1:81}$; 9) $\sqrt[4]{5^8}$.

Bringe den vor dem Wurzelzeichen stehenden Faktor unter dasselbe:

- 10) $a^2 \cdot \sqrt[3]{a}$; 11) $a^2 b \sqrt[3]{1:a^4:b^3}$;

$$12) (p-q) \sqrt[4]{(p+q):(p-q)^3} \quad 13) \frac{a}{b^2} \cdot \sqrt[x]{\frac{b^2 x + 1}{a^x}}$$

$$14) (p+q) \cdot \sqrt[3]{\frac{p^3+q^3}{p^3+q^3+3pq(p+q)}}.$$

Bringe soviel wie möglich vor das Wurzelzeichen:

$$15) \sqrt[3]{2^3 a^3 b^3 c}; \quad 16) \sqrt[4]{a^5 b^6 c^7} \quad 17) \sqrt[5]{a^{10} b^{15} c^{14}};$$

$$18) \sqrt[3]{a^4 b^4} + \sqrt[5]{32 a^6 b^6}; \quad 19) \sqrt[6]{2^{12} \cdot 5^{18} a^6 b};$$

$$20) \sqrt[5]{8 \cdot 36 \cdot 27 a^5}; \quad 21) \sqrt[9]{a^9 b^8 (b + b c)}.$$

Berechne oder vereinfache:

$$22) \sqrt[8]{\frac{a^5 b^2}{a^3 b^4}} : \sqrt[8]{\frac{a b}{a^7 b^8}}; \quad 23) (a+b) : \sqrt[n]{(a+b)^{n-1}};$$

$$24) \sqrt{(a^2 + 2ab + b^2)^3}; \quad 25) \sqrt[4]{(16 a^8 b^4 c^4)^3};$$

$$26) \sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}; \quad 27) \sqrt[5]{\sqrt[6]{a^{15}}}; \quad 28) \sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[3]{b}}};$$

$$29) \sqrt[9]{\sqrt[5]{a^9}}; \quad 30) \sqrt[12]{\sqrt[5]{a^8}}; \quad 31) \sqrt[4]{\sqrt[6]{a}} \cdot \sqrt[8]{\sqrt[8]{b}};$$

$$32) \sqrt[3]{27^6}; \quad 33) \sqrt[3]{\sqrt[4]{4^6}}; \quad 34) \sqrt[5]{100000^{12}};$$

Bringe auf den kleinsten positiven Wurzel-Exponenten:

$$35) \sqrt[8]{a^{12}}; \quad 36) \sqrt[86]{a^{24}}; \quad 37) \sqrt[16]{a^{4p}}; \quad 38) \sqrt[8p]{a^{4p}};$$

$$39) \sqrt[4]{a^{16}}; \quad 40) \sqrt[6]{a^{-15}}; \quad 41) \sqrt[3pq]{a^{4pq}}.$$

Bringe auf den Wurzel-Exponenten 36:

$$42) \sqrt[3]{a^2}; \quad 43) \sqrt[4]{a^8 b}; \quad 44) \sqrt[6]{a b^3 c^4}; \quad 45) \sqrt[12]{a b^{-1} c^0}.$$

Verwandle in eine Wurzel aus einem Produkte von Potenzen:

$$46) \sqrt[4]{p^7} \cdot \sqrt[8]{p}; \quad 47) \sqrt[8]{a^4} \cdot \sqrt[12]{a^7} \cdot \sqrt[6]{a^2}; \quad 48) \sqrt[12]{a^{17}} : \sqrt[6]{a^5};$$

$$49) \sqrt[4]{a^3 b^3} \cdot \sqrt[16]{a b^6}; \quad 50) \sqrt[6n]{a b} \cdot \sqrt[15n]{a^4 b};$$

$$51) \sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{\frac{b^2}{a^2}}; \quad 52) \sqrt[8]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[12]{\frac{b}{a}};$$

$$53) \sqrt[12]{\frac{p}{q}} \cdot \sqrt[8]{\frac{p^5}{q^3}} : \sqrt[6]{\frac{p^2}{q^4}}; \quad 54) \sqrt[4]{a} \sqrt[3]{a^7}; \quad 55) \sqrt[5]{a^2} \sqrt[3]{a^2};$$

$$56) \sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a}; \quad 57) a^2 \sqrt[6]{a^{-2} a b};$$

$$58) \sqrt[5]{p^{-3}} \cdot \sqrt[3]{q}; \quad 59) \sqrt[3]{p} \sqrt[3]{\frac{q}{p}}.$$

Berechne:

$$60) \sqrt[3]{405224}; \quad 61) \sqrt[3]{2515456}; \quad 62) \sqrt[3]{46574625000};$$

$$63) \sqrt[3]{46967731712}; \quad 64) \sqrt[3]{778,688}; \quad 65) \sqrt[3]{0,012167};$$

$$66) \sqrt[3]{5 \frac{13}{343}}; \quad 67) \sqrt[3]{\frac{32}{729} + \frac{913}{91125}}.$$

Suche die dritte Wurzel aus der nächst kleineren Kubikzahl zu:

$$68) 7000; \quad 69) 29000; \quad 70) 456789; \quad 71) 3647819.$$

Schliesse in zwei Grenzen ein, die dritte Potenzen von Zahlen sind, die sich um $\frac{1}{1000}$ unterscheiden:

72) 2; 73) 10; 74) 16; 75) 30; 76) 3,1416.

Berechne die Kubikwurzeln:

$$77) \sqrt[3]{a^3 + 12a^2b + 48ab^2 + 64b^3};$$

$$78) \sqrt[3]{27f^3 + 18f^2 + 4f + \frac{8}{27}};$$

$$79) \sqrt[3]{8g^6h^3 + 5g^3h + \frac{25}{24h} + \frac{125}{1728g^3h^3}};$$

$$80) \sqrt[3]{8 + 30x + \frac{99}{2}x^2 + \frac{365}{8}x^3 + \frac{99}{4}x^4 + \frac{15}{2}x^5 + x^6}$$

$$81) \sqrt[3]{b^6 - 6b^5 + 13,5b^4 - 14b^3 + 6,75b^2 - 1,5b + 0,125};$$

Berechne:

$$82) \sqrt[3]{4}; \quad 83) \sqrt[3]{121}; \quad 84) \sqrt[3]{0,27}; \quad 85) \sqrt[6]{196};$$

$$86) \sqrt[6]{729}; \quad 87) \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}; \quad 88) \sqrt[-15]{0,00032}.$$

Forme so um, dass die numerische Berechnung bequem wird:

$$89) \sqrt[4]{2^5 \cdot 3^6 \cdot 63}; \quad 90) \sqrt[3]{\sqrt{125}}; \quad 91) \sqrt[5]{\sqrt[3]{32}};$$

$$92) \sqrt[3]{\frac{7}{32}}; \quad 93) 7 \cdot \sqrt[4]{2} + 3 \sqrt[4]{32}; \quad 94) \frac{1}{2 - \sqrt[3]{2}}.$$

Löse die Gleichungen:

$$95) (x + 2\sqrt{5})^4 = 25; \quad 96) x^{10} - 9x^5 = 736;$$

$$97) \sqrt[3]{x+5} - \sqrt[3]{x} = 1; \quad 98) \begin{cases} x^2 y = 20 \\ x \cdot y^3 = 50 \end{cases};$$

$$99) \begin{cases} x^9 + y^9 = 513 \\ x^3 + y^3 = 9 \end{cases}; \quad 100) \begin{cases} xyz = 6 \\ yzu = 24 \\ zux = 12 \\ uxy = 8 \end{cases}$$

§ 25. Potenzen mit gebrochenen und irrationalen Exponenten.

Verwandle in eine Wurzel:

$$1) p^{\frac{1}{2}}; 2) a^{\frac{3}{4}}; 3) b^{0,3}; 4) a^{-\frac{1}{2}}; 5) b^{-1,5}$$

Berechne:

$$6) 25^{\frac{1}{2}} + 216^{\frac{2}{3}}; 7) 256^{\frac{3}{4}} \cdot 243^{\frac{3}{5}}; 8) 4^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} \cdot 16^{\frac{3}{4}};$$

$$9) \sqrt[2]{7} + \sqrt[3]{64}; 10) \sqrt[2]{\frac{1}{64}} : \sqrt[2]{16}$$

Berechne auf zwei Dezimalstellen:

$$11) 5^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}; 12) \sqrt[4]{25} : 5^{\frac{1}{2}} \cdot 25^{\frac{3}{4}};$$

$$13) 16^{\frac{2}{3}} \cdot 1,25^{\frac{1}{6}}$$

Verwandle in eine Potenz mit gebrochenem Exponenten:

$$14) \sqrt[4]{b^7}; 15) \sqrt[p]{p^3}; 16) (\sqrt[10]{a})^8; 17) \sqrt[a]{b}; 18) \sqrt[a^4 + b]$$

Vereinfache durch Anwendung der Potenzsätze:

$$19) a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}}; 20) b^{\frac{3}{4}} \cdot b^{-\frac{1}{4}}; 21) a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}};$$

$$22) b^{\frac{7}{8}} \cdot b^{\frac{3}{4}}; 23) a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{2}}; 24) p^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt[p^4]{p^4} \cdot \sqrt[p^3]{p^3};$$

$$25) a^{-0,1} \cdot a^{\frac{1}{2}}; \quad 26) \left(a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{2}{3}} \cdot c^{\frac{3}{5}} \right) \left(a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{6}} c^{\frac{1}{10}} \right);$$

$$27) \left(a^{-\frac{3}{4}} b^{\frac{5}{6}} \right) \left(a^2 b^{-\frac{2}{3}} \right);$$

$$28) \left(\sqrt[3]{v^4 w^2} \right) : \left(\sqrt[6]{v^6 w^4} \right) : \sqrt{vw};$$

$$29) \left(a^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad 30) \left(a^{\frac{1}{5}} : a^{\frac{3}{10}} \right)^{-5}; \quad 31) \left(b^{\frac{7}{8}} \cdot \sqrt[4]{b} \right)^{\frac{16}{3}}.$$

Bestimme durch Potenzieren die gebrochene Zahl k so, dass die folgenden Ungleichungen richtig werden:

$$32) 3^k < 5 < 3^{k+\frac{1}{5}}; \quad 33) 6^k < 10 < 6^{k+\frac{1}{4}};$$

$$34) 2^k < 100 < 2^{k+\frac{1}{8}}; \quad 35) \left(\frac{1}{5} \right)^k < \frac{3}{4} < \left(\frac{1}{5} \right)^{k+\frac{1}{6}}.$$

Löse die folgenden Exponentialgleichungen durch Zurückführung auf Gleichungen ersten Grades:

$$36) 3^{x+6} = 3^{10}; \quad 37) 5^{11} = 5^{2(x+1)} - 1;$$

$$38) \sqrt[4]{19^{13} - x} = \sqrt[6]{19^{2x+2}}; \quad 39) 4^x = 2^{x+3};$$

$$40) 1897^x = 1; \quad 41) 4 \cdot 2^{x+1} = 8^x : 2;$$

$$42) 1 : 3^{5x} = 243^{x+2}; \quad 43) (0,5)^{-10+x} = \sqrt{32^{3x+4}};$$

$$44) \begin{cases} a^{x+2y} \cdot a^{x-y} = a^{15} \\ a^{x-2y} \cdot a^{2x+3y} = a^{22} \end{cases}; \quad 45) \begin{cases} 18^x : 18^y = 324 \cdot 18 \\ 7^x \cdot 7^y = 343 \cdot 49 \end{cases};$$

Löse die folgenden Exponentialgleichungen durch Zurückführung auf Gleichungen zweiten Grades:

$$46) 7^{(x-5)(x+2)} = 1; \quad 47) 16^{x \cdot x} = 32 : 2^x;$$

$$48) \sqrt[x]{13} = 13^x; \quad 49) \sqrt[x+1]{5} = 5^x : \sqrt[3]{5^5};$$

$$50) (a^{2x})^{6x+2} = [(\sqrt{a})^{x+13}]^2; \quad 51) \begin{cases} 3^{2x+1} = 9y+1 \\ 2^{4x+1} = 32y^2+1. \end{cases}$$

§ 26. Logarithmen.

Schreibe mit Benützung des Zeichens „log“ die folgenden Identitäten:

$$1) 6^3 = 216; \quad 2) 10^4 = 10000; \quad 3) \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2;$$

$$4) \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}; \quad 5) \left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{16}{25}; \quad 6) 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2};$$

$$7) a^1 = a; \quad 8) \sqrt[3]{1} = 1; \quad 9) p^{-m} = \frac{1}{p^m};$$

$$10) \sqrt[5]{1024} = 4; \quad 11) (0,008)^{-\frac{2}{3}} = 25.$$

Schreibe in Potenzform:

$$12) \log_2 16 = 4; \quad 13) \log_3 729 = 6; \quad 14) \log_8 8 = \frac{3}{4};$$

$$15) \log_{25} 125 = \frac{3}{2}; \quad 16) \log_{100} 10 = -\frac{1}{2};$$

$$17) \log_{0,125} 0,5 = 3; \quad 18) \log_{1728} 12 = -\frac{1}{3};$$

$$19) \log_{27} (8:27) = -1,5; \quad 20) \log_{49} (49^n) = 2n.$$

Welches sind für die Basis 4 die Logarithmen von:

$$21) 16; \quad 22) 256; \quad 23) 1; \quad 24) \frac{1}{4}; \quad 25) \sqrt[4]{4}; \quad 26) 4^{\frac{1}{5}};$$

$$27) \sqrt[7]{\frac{1}{16}}; \quad 28) \frac{1}{256}; \quad 29) 8; \quad 30) \frac{1}{32}?$$

31) 9^{100} liegt zwischen 10^{95} und 10^{96} . Wie heisst also der dekadische Logarithmus von 9 auf zwei Stellen?

Logarithmiere:

$$32) a b c d; \quad 33) (a b):(e f); \quad 34) 7 a:(b c);$$

$$35) (a + b):(c d); \quad 36) a b^5; \quad 37) (a b)^5; \quad 38) a^4 b^5 c^6;$$

$$39) \frac{a^2 b^3 c^4}{d^5 e^6}; \quad 40) \frac{a^{-3} b^4}{c^{-5}}; \quad 41) \sqrt[4]{ab}; \quad 42) \sqrt[3]{a \cdot a^3};$$

$$43) \frac{a^2 x \sqrt[3]{b}}{a x^2 \sqrt[3]{b+x}}; \quad 44) \frac{1}{a \sqrt[3]{bc}}; \quad 45) a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{5}{6}} \cdot c^{-\frac{2}{3}}.$$

Verwandle in einen Logarithmus:

$$46) \log a + \log b - \log c; \quad 47) \log a - \log b + 2 \log c;$$

$$48) 3 \log a - 4 \log b; \quad 49) \frac{1}{2} \log a - \frac{1}{3} \log b + 2 \log f;$$

$$50) 7 \log a - \frac{2}{3} (\log a + 2 \log b) + \frac{1}{6} \log (b + c);$$

$$51) \log (a^3 - b^3) - \log (a - b); \quad 52) \log a + \log \left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

Berechne logarithmisch:

$$53) 0,4735 \cdot 2,349; \quad 54) 0,8124 \cdot 16,12;$$

$$55) \frac{417,3}{91,46}; \quad 56) \frac{410}{987,1}; \quad 57) \frac{0,05673}{0,00123}; \quad 58) \frac{1}{3,142};$$

$$59) (7,341)^2; \quad 60) 4,92 \cdot 5,34 \cdot 6,78; \quad 61) 1,2345 : 8,9761;$$

$$62) 4,8 \cdot 9437 : 743,24; \quad 63) (3,1416)^3; \quad 64) \sqrt{2};$$

$$65) \sqrt[3]{2}; \quad 66) \sqrt[5]{2}; \quad 67) \sqrt[3]{10}; \quad 68) \sqrt{1029};$$

$$69) \frac{43,478 \cdot \sqrt[5]{61}}{\sqrt[7]{13}}; \quad 70) \sqrt[19]{19}; \quad 71) \sqrt{13,478 \cdot 14,579};$$

$$72) \sqrt[9]{5 \frac{1}{5} \cdot 6 \frac{1}{6} \cdot 0,12}; \quad 73) \sqrt[7]{\frac{9,41 \cdot 7,83}{1,2346}};$$

$$74) \left(\frac{5}{8}\right)^{0,25}; \quad 75) \left(\sqrt[3]{0,23}\right)^{0,8};$$

$$76) \sqrt[5]{\frac{(13,43 \cdot 5,67)^4}{(0,912)^{\frac{1}{2}}}}; \quad 77) \sqrt[3]{7,48} : \sqrt[7]{3,48};$$

$$78) \sqrt[3]{-1,0005}; \quad 79) \sqrt[5]{-40,123}.$$

Die logarithmische Berechnung ist unterbrochen bei:

$$80) \frac{1}{4} \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}; \quad 81) \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}};$$

$$82) \sqrt[4]{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 15}; \quad 83) \sqrt[18]{11^{13} + 12^{13}};$$

$$84) \left(\sqrt[4]{7} + \sqrt[5]{9} \right)^{0,75}.$$

Berechne nach der Formel

$$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)} \quad \text{logarithmisch:}$$

$$85) \sqrt{4,732^2 - 3,124^2}; \quad 86) \sqrt{0,1297^2 - 0,0146^2};$$

Berechne logarithmisch die mittlere Proportionale zu:

$$87) 4,129 \text{ und } 5,684; \quad 88) 0,1235 \text{ und } 7,1964;$$

$$89) \sqrt[10]{9} \text{ und } \sqrt[9]{10}; \quad 90) 3^{\frac{3}{4}} \text{ und } \left(\frac{3}{4}\right)^3.$$

91) Berechne logarithmisch den Inhalt eines Dreiecks aus seinen drei Seiten a , b , c nach der Formel

$$J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ wo } s = \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ ist, für:}$$

$$a=5,6781; \quad b=4,1298; \quad c=3,0784.$$

92) Das Volumen einer Kugel vom Radius r beträgt $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$, wo $\pi = 3,1416$ ist. Wieviel Liter Gas fasst also ein kugelförmiger Ballon, dessen Radius 1,734 Meter beträgt?

93) Wenn der gleichzeitige Barometerstand an zwei Orten a und b Millimeter beträgt, so ist, wenn an beiden Orten etwa gleiche Temperatur herrscht, der eine Ort um $18382 (\log a - \log b)$ Meter höher gelegen, als der andere. Nun stand das Barometer am Fusse und an der Spitze des Nikolai-Kirchturms in Hamburg 771,9 bzw. 758,0 Millimeter. Wie hoch ist dieser Turm?

94) Wieviel Stearinkerzen müssten an der Stelle der Sonne brennen, wenn dieselben die Erde ebenso beleuchten sollen, wie die Sonne selbst, wenn angenommen wird, dass die Lichtwirkung proportional dem Quadrate der Entfernung abnimmt, dass die Erde von der Sonne 150 Millionen Kilometer entfernt ist, und dass die Wirkung des Sonnenlichts auf der Erde dieselbe ist, wie 60 000 Stearinkerzen in 1 Meter Entfernung?

95) Mit wieviel Ziffern wird $9^{(9^9)}$ geschrieben?

Löse die folgenden Exponentialgleichungen durch Uebergang zu den Logarithmen:

$$96) \sqrt[x]{9^{3x-4}} = \sqrt[2x]{85^{x-8}}; \quad 97) 7^{(2^x)} = 2^{(7^x)};$$

$$98) 7^{3x+2} + 4^{x+3} = 7^{3x+1} + 4^{x+2};$$

$$99) 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 2^x + 2^{x+2} + 2^{x+4};$$

$$100) \begin{cases} 5^x \cdot 2^y = 207 \\ x = y - 1 \end{cases}; \quad 101) \begin{cases} x^y = y^x \\ 11^x = 5^y \end{cases}.$$

VII. Abschnitt.

Anhang.

§ 27. Bemerkungen zum systematischen Aufbau der Arithmetik.

Welche Formeln der zweiten Stufe sind den folgenden analog:

$$1) a + (b - c) = a + b - c; \quad 2) a - (b - c) = a - b + c;$$

$$3) a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m; \quad 4) \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}?$$

Welches ist die passive Zahl bei:

$$5) 7 \text{ Meter mal } 3; \quad 6) 20 : 4; \quad 7) \sqrt[8]{19}; \quad 8) \log 19?$$

Aus den folgenden direkte Rechnungsarten enthaltenden Identitäten sollen die entsprechenden indirekte Rechnungsarten enthaltenden Identitäten abgeleitet werden:

$$9) 9 + 7 = 16; \quad 10) 5 \cdot 9 = 45; \quad 11) 3^4 = 81;$$

$$12) (-1)^9 = -1; \quad 13) 27 \frac{2}{3} = 9; \quad 14) 100 = 4 \cdot 25;$$

$$15) 32 = 64 \frac{5}{6}.$$

§ 28. Arithmetische und geometrische Reihen.

Bei einer arithmetischen Reihe bezeichne immer a das Anfangsglied, d die konstante Differenz, n die Anzahl der Glieder, z das n -te Glied, s die Summe aller n Glieder. Hier-nach sollen die beiden fehlenden dieser 5 Grössen berechnet werden, wenn gegeben ist:

$$1) a = 90, d = 12, n = 10; \quad 2) a = 10, s = 1000, n = 10;$$

$$3) s = 700, n = 21, d = 8; \quad 4) a = 9, z = 1701, n = 19;$$

- 5) $a = 16 \frac{1}{2}$, $n = 200$, $z = 20047 \frac{1}{2}$.
 6) $a = 8$, $d = 5$, $z = 108$; 7) $a = \frac{3}{4}$, $d = \frac{1}{2}$, $s = 110$;
 8) $a = 1$, $z = 100$, $s = 1717$; 9) $d = \frac{1}{2}$, $n = 100$, $z = 300$;
 10) $s = 20 + 13 \sqrt{2}$, $n = 10$, $z = 2.6 \cdot \sqrt{2}$;
 11) $s = 4089$, $d = 10$, $z = 281$.

12) Wieviel Schläge thut eine Uhr im Laufe von 12 Stunden?

13) Wie gross ist die Summe aller durch 5 teilbaren Zahlen von 1 bis 207?

14) Wie hoch ist im Jahre 1897 das Gehalt eines Buchhalters, der 1879 mit einem Anfangsgehalt von 3000 Mark angestellt wurde und alljährlich 200 Mark Zulage erhielt?

15) Ein Schnellläufer legt in den ersten zehn Minuten seines Dauerlaufs 2000 Meter und in jedem folgenden Zeitraume von zehn Minuten immer gleichviel weniger zurück als im vorangehenden. In den letzten zehn Minuten lief er nur noch 1010 Meter. Die ganze Strecke, die er durchlief, betrug 18060 Meter. Wie lange lief er?

16) Zwischen 3 und 4 sollen 9 Glieder so eingeschaltet werden, dass eine arithmetische Reihe von 11 Gliedern entsteht. Wie gross ist ihre Summe?

17) Wieviel fünfziffrige Zahlen sind durch 8 teilbar?

18) Wie gross ist die Summe aller dreiziffrigen Zahlen, die, durch 4 dividiert, den Rest 1 lassen?

19) Die Summe des dritten und fünften Gliedes einer arithmetischen Reihe beträgt 32, die des vierten und zehnten beträgt 50. Wie gross ist das zwanzigste Glied und die Summe der ersten 20 Glieder?

20) 19 Parallelen sind durch zwei gerade Linien begrenzt. Jede folgende ist immer 2 Meter länger als die vorhergehende. Die Summe aller Parallelen beträgt 475 Meter. Wie lang ist die erste, und wie lang die letzte?

21) Ein Diener, der mit einem anfänglichen Jahresgehälte von 200 Mark in Dienst trat und in jedem Jahre 20 Mark mehr erhielt, als im vorhergehenden, hatte während seiner ganzen Dienstzeit zusammen 6660 Mark Lohn erhalten. Wieviel Jahre stand er in Diensten? (Quadratische Gleichung).

22) Wie heisst das sechste Glied der geometrischen Reihe, die mit 3 anfängt, und deren konstanter Quotient $\frac{2}{3}$ ist?

23) Wie heisst das vierte Glied der geometrischen Reihe, deren beide erste Glieder 3 und 4 heissen?

Berechne logarithmisch das 18te Glied der geometrischen Reihe, bei denend das Anfangsglied a und der konstante Quotient q die folgenden Werte haben:

24) $a = 1, q = 1\frac{1}{2}$; 25) $a = 3, q = \frac{2}{3}$; 26) $a = \frac{1}{4}, q = -2$

27) $a = 20, q = \frac{5}{6}$; 28) $a = -9, q = \frac{3}{4}$; 29) $a = 0,12; q = 0,9$.

30) Wie gross ist das Anfangsglied a , wenn das siebente Glied 9 und das achte Glied 10 heisst?

31) Das wievielte Glied einer mit 3 beginnenden Reihe ist gleich 177147?

Berechne die Summe der ersten 10 Glieder der Reihe, deren Anfangsglied a und deren konstanter Quotient q die folgenden Werte haben:

$$32) a = 1, q = 2; \quad 33) a = \frac{3}{4}, q = 4. \quad 34) a = 729, q = \frac{2}{3}.$$

35) Wie gross ist die Summe s der geometrischen Reihe, bei welcher $a = 2$, $z = 3$, $q = \sqrt[10]{\frac{2}{3}}$ ist?

Drücke aus:

36) a durch z, q, n ; 37) a durch s, q, n ; 38) z durch s, q, n ;
39) a durch z, q, s ; 40) z durch a, s, q ; 41) q durch a, z, n .

Berechne logarithmisch die beiden übrigen von den fünf Grössen a, q, n, z, s , wenn gegeben sind:

$$42) s = 7000, q = 2, n = 19; \quad 43) z = 16000, s = 100000, n = 5;$$

$$44) a = 7, z = 19, n = 15; \quad 45) q = 3, n = 3, s = 27,3.$$

46) Zwischen 7 und 8 sind neun Glieder so eingeschaltet, dass eine geometrische Reihe von 11 Gliedern entstanden ist. Wie gross ist die Summe dieser Reihe?

47) Bei der gleichschwebenden Temperatur enthält eine Oktave 12 Töne, sodass deren Schwingungszahlen eine geometrische Reihe bilden, und der 13. Ton doppelt so viel Schwingungen bekommt wie der erste. Wie gross ist das Intervall zweier aufeinander folgender Töne, d. h. der konstante Quotient jener Reihe?

48) Die zu den Röntgen'schen Versuchen dienenden Vacuum-Röhren werden durch Quecksilber-Luftpumpen hergestellt. Die Röhren müssen schliesslich Luft ent-

halten, deren Dichtigkeit $\frac{1}{100\,000}$ bis $\frac{1}{1\,000\,000}$ der Dichtigkeit der Atmosphäre ist. Wenn nun mit 80 Schwengelhebungen die Dichtigkeit auf $\frac{1}{500\,000}$ vom Atmosphären-Druck herabgedrückt ist, welches Dichtigkeitsverhältnis hat die Luft in der Röhre zwischen zwei aufeinanderfolgenden Hebungen?

49) Wie hoch steht das Barometer in der Höhe von p Metern, wenn es in der Höhe von h Metern b Millimeter, in der Höhe von h' Metern b' Millimeter zeigte, und wenn angenommen wird, dass die Barometerstände eine geometrische Reihe bilden, während die zugehörigen Höhen eine arithmetische Reihe bilden?

50) Der „gesellschaftliche Schneeball“ besteht darin, dass Jemand, um eine grössere Summe zum Zweck der Wohlthätigkeit zusammenzubringen, an zwei Freunde schreibt, dass Jeder wiederum an zwei Freunde die Bitte schreiben möchte, u. s. w., und dass Jeder, der auf solche Weise aufgefordert wird, 10 Pfennig opfert. Wenn nun angenommen wird, dass zwischen einer solchen Aufforderung und der Erfüllung derselben immer 1 Tag vergeht, und dass immer nur an solche Personen geschrieben wird, die nicht schon vorher vom „Schneeball“ berührt sind, so lässt sich berechnen, dass in kurzer Zeit eine Summe von 100 000 Mark zusammenkommt. In wieviel Tagen nämlich?

51) Wie heisst die geometrische Reihe, bei welcher die Summe aus dem ersten und vierten Gliede 27, aus dem vierten und siebenten Gliede 216 beträgt?

52) Wie heisst die geometrische Reihe, bei welcher die Summe des dritten und vierten Gliedes 36, das Produkt des ersten und sechsten Gliedes 288 beträgt?

Summiere:

53) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ ad inf.

54) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$ ad inf.

55) $a + 0,2 \cdot a + 0,04 \cdot a + 0,008 \cdot a + \dots$ ad inf.

56) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots$ ad inf.

57) $1 + \frac{9}{10} + \frac{81}{100} + \frac{729}{1000} + \dots$ ad inf.

58) $27 + \frac{27}{10} + \frac{27}{100} + \frac{27}{1000} + \dots$ ad inf.

59) Wenn man eine Strecke um $\frac{3}{4}$ von ihr verlängert, die erhaltene Strecke wieder um $\frac{3}{4}$ dieser Verlängerung vergrößert, und so immer weiter fortfährt, so strebt man unaufhörlich einem gewissen Punkte zu, ohne ihn je zu erreichen. Welcher Punkt ist dies?

60) A verfolgt B, der ihm ein Kilometer voraus ist, und läuft doppelt so schnell wie der verfolgte B. Nachdem A einen Kilometer gelaufen, ist ihm B ein halbes Kilometer voraus. Nachdem A auch dieses halbe Kilometer gelaufen, ist ihm B ein viertel Kilometer voraus u. s. w. So scheint es, als wenn A den B nie einholen kann. (Sophisma des Zenon von Elea, 450 vor Chr. G.). Wo holt er ihn aber ein?

61) Welcher Zahl ist $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ ad inf. für $x < 1$ gleich zu setzen?

62) Bestimme für $x < 1$ die Summe $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$ ad inf.?

63) Summiere $a + (a+d)x + (a+2d)x^2 + (a+3d)x^3 + \dots$ ad inf. für $x < 1$.

§ 29. Zinseszins- und Rentenrechnung.

1) Wie gross ist der Vermehrungsfaktor q , wenn die Prozentzahl $p = 3\frac{3}{4}$ ist?

2) Wie gross ist die Prozentzahl p für den Vermehrungsfaktor $q = 1,035$?

Wieviel wird durch Zinseszins in 10 Jahren:

3) aus 500 Mark bei 3 Proz., 4) aus 300 Mark bei 5 Proz.;
5) aus 1000 Mark bei $4\frac{1}{4}$ Proz., 6) aus 700 Mark bei 7 Proz.?

7) Ein Knabe erhielt bei seiner Taufe im ersten Lebensjahre ein Sparkassenbuch über 100 Mark geschenkt. Dieses Geld stand auf Zinseszins, ohne dass je etwas hinzugefügt oder abgeholt wurde. Als der junge Mensch im 21. Lebensjahre, also nach 20 Jahren, eine Universität bezog, holte er sein Geld von der Sparkasse ab. Wieviel zahlte sie ihm aus, da sie $3\frac{1}{2}$ Prozent rechnete?

8) Wie gross ist der heutige Wert einer erst heute über 15 Jahre zahlbaren Schuld von 1200 Mark bei 4 Prozent?

9) Bei wieviel Prozent wird durch Zinseszins aus 100 Mark in 15 Jahren 200 Mark?

10) Bei wieviel Prozent verhundertfacht sich ein Kapital in 100 Jahren?

In wieviel Jahren verdoppelt sich ein Kapital:

11) bei 3 ‰, 12) bei 4 ‰, 13) bei $4\frac{3}{4}$ ‰, 14) bei 5 ‰?

15) A giebt 1000 Mark zu 4 ‰, B 1200 Mark zu $3\frac{1}{2}$ ‰ auf Zinseszins. Nach wieviel Jahren ist das Guthaben beider Freunde gleich?

16) Jemand beteiligt sich an einem Aktien-Unternehmen, indem er 20 Aktien zu 1000 Mark beim Kurse von 95 kauft. Nachdem er 5 Jahre hindurch gar keinen Zinsgewinn genossen, stiegen die Aktien plötzlich auf den Kurs 105, zu welchem Kurse er sie verkaufte. Mit wieviel Prozent jährlich hat sich sein Geld verzinst?

17) Für eine mehrjährige Pacht bietet A 1000 Mk., B aber 1200 Mark, die jedoch erst nach vier Jahren ohne Zinsen zu zahlen wären. Wer bietet mehr, wenn eine Verzinsung von 4 Prozent gerechnet wird?

18) Der Bestand eines Waldes wird zu 30 000 Kubikmeter Holz abgeschätzt. Man kann annehmen, dass auf 100 Kubikmeter jährlich 2 Kubikmeter zuwachsen. Wie gross ist der Bestand nach 6 Jahren, wenn nichts abgeholzt wird?

19) Die Zunahme der Bevölkerung einer Stadt beträgt zwei Prozent jährlich. Sie hat jetzt 70 000 Einwohner. Vor wieviel Jahren hatte sie 50 000 Einw.?

20) Wie gross ist heute über zehn Jahre der Gesamtwert der zehn Zahlungen von je 800 Mark, von denen die erste heute über 1 Jahr, die zweite heute über 2 Jahr u. s. w. stattfinden soll, wenn $3\frac{1}{2}$ Prozent gerechnet werden?

21) Ein Matrose schickte alljährlich 100 Mark an eine Sparkasse die $3\frac{1}{2}$ Prozent rechnet. Die erste Sendung geschah Ende 1870, die letzte Ende 1895. Welches Guthaben hatte er an dem letzteren Zeitpunkte?

22) Wieviel muss Jemand vom 1. Januar 1885 ab alle Neujahr bis zum 1. Januar 1896 auf Zinseszins geben, um am 31. Dezember 1896 im Besitze von 15 000 Mark zu sein?

23) Ein Fabrikbesitzer gab alle Jahr 2000 Mark auf Zinseszinsen bei $4\frac{1}{2}$ Prozent. Er hatte dadurch

1896 ein Guthaben von 50 000 Mark. In welchem Jahre gab er die ersten 2000 Mark hin?

24) Zu einem Kapital, das 5000 Mark betrug, wird nach je einem Jahre, im ganzen 18mal, 250 Mark hinzugefügt. Wie gross war dasselbe bei $4\frac{1}{2}$ Prozent geworden, als die letzten 250 Mark soeben hinzugefügt waren?

25) Jemand lässt sein Vermögen, das am 1. Jan. 1872 100 000 Mark betrug, von einem Bankier zu 4 Prozent verwalten. Er lässt sich von Ende des Jahres 1872 an alljährlich 6000 Mark schicken. Wie hoch belief sich das Vermögen nur noch am Anfang des Jahres 1883?

26) Am 1. Januar 1881 betrug die Staatsschulden Hamburgs 120 Millionen Mark. Wieviel Mark müssten alljährlich verwandt werden, damit diese Summe am Ende des Jahres 1900 getilgt wäre, wenn $3\frac{1}{2}$ Prozent gerechnet werden?

27) Jemand kauft in einem Abzahlungsgeschäft für 1000 Mark. Nach je einem Jahre muss er 5 Jahre hindurch dafür 300 Mark zahlen. Wieviel Prozent rechnet das Abzahlungsgeschäft?

28) Ein Wald, dessen Bestand jetzt 32000 Kubikmeter beträgt, soll in 20 Jahren abgeholzt sein. Wieviel Kubikmeter müssen alljährlich geschlagen werden, wenn $2\frac{1}{2}$ Prozent alljährlicher Zuwachs stattfindet?

29) Wie gross ist der Baarwert einer Rente von 500 Mark, die bei 5 Prozent 16 Jahre lang zu laufen hat?

30) Eine Jahresrente von 1200 Mark, die zehn Jahre hindurch am Ende jedes Jahres fällig ist, soll in eine andere verwandelt werden, die 12 Jahre hindurch am Anfang jedes Jahres fällig ist. Wie hoch beläuft sich die neue Rente?

31) In einer Arbeiterkolonie kann jeder Arbeiter dadurch sein Häuschen als Eigentum erwerben, dass er 20 Jahre lang am Anfang jedes Jahres 200 Mark zahlt. Wie hoch rechnet man den Baarwert eines solchen Häuschens, wenn 4 Prozent zu Grunde gelegt werden?

32) Im Jahre 1875 hatte das deutsche Reich 42 727 360 Einwohner. Der Ueberschuss der Geburten über die Sterbefälle beträgt durchschnittlich 3 Prozent. Es wandern aber alljährlich durchschnittlich 80 000 Personen mehr aus, als ein. Wieviel Einwohner müsste hiernach das deutsche Reich im Jahre 1900 haben?

33) Ein Testament bestimmte, dass von einem Vermögen von 400 000 Mark die ersten 15 Jahre hindurch alljährlich 12 000 Mark für die Erziehung von drei minderjährigen Neffen des Erblassers verwandt werden sollten, dass danach aber die Zinsen dauernd zu Universitäts-Stipendien verwandt werden sollten. Wieviel Mark können dann alle Jahre zur Verwendung kommen, wenn $3\frac{3}{4}$ Prozent gerechnet werden?

34) Ein 35jähriger Arzt kauft eine auf 30 000 Mk. lautende Lebensversicherungspolice. Er stirbt im Alter von 59 Jahren. Dadurch kam es, dass sich seine jährlichen Prämienzahlungen mit dem Werte der Police bei vierprozentigen Zinseszinsen das Gleichgewicht hielten. Wie hoch war seine jährliche Prämie?

35) Jemand hat heute die Verpflichtung übernommen, nach je einem Jahre 9 Jahre hindurch je 1000 Mark zu zahlen. Zu welchem Zeitpunkte ist diese Verpflichtung bei 4 Prozent 9000 Mark wert?

36) Wie lange kann einem Kapitale von 50 000 Mark alljährlich 1000 Mark entnommen werden, damit es nach Ablauf dieser Zeit noch dauernd 1600 Mark

Zinsen abwerfen kann, wenn $4\frac{1}{2}$ Prozent gerechnet werden?

37) Zwei Kapitalien, von denen das eine 400 Mk. grösser ist, als das andere, wachsen in 12 Jahren bei 4 Prozent so an, dass ihre Summe 30 000 Mk. beträgt. Welches sind die anfänglichen Werte der Kapitalien?

38) Was wird aus 1200 Mark in 12 Jahren bei 4 Prozent jährlich, wenn die Zinsen vierteljährlich zum Kapital geschlagen werden?

39) Welches ist der Baarwert einer Rente von 900 Mark, die 12 Jahre lang laufen soll, wenn die Zinsen monatlich zum Kapital geschlagen werden, wenn $3\frac{1}{2}$ Prozent jährlich gerechnet wird?

40) In wie viel Jahren verdoppelt sich ein Kapital bei 4 Prozent, wenn die Zinsen täglich (Jahr = $365\frac{1}{4}$ Tag) zum Kapital geschlagen werden?

41) In einer Stadt beträgt der Ueberschuss der Geburtsfälle über die Sterbefälle wöchentlich durchschnittlich 0,025 Prozent. Wieviel Prozent also jährlich?

42) Jemand will n Jahre hindurch am Ende jedes Jahres r Mark einzahlen, damit er nach Ablauf der Zeit $n : a$ Jahre hindurch r mal a Mark geniessen kann. Wieviel hat er jährlich zu zahlen, wenn p Prozent gerechnet werden?

§ 30. Der binomische Lehrsatz.

Entwickle:

- 1) $(a + b)^8$; 2) $(a - b)^7$; 3) $(1 + x)^8$; 4) $(2 + y)^9$;
 5) $(c - 3)^{11}$; 6) $(x - \frac{1}{5})^5$; 7) $(a - \sqrt{3})^6$; 8) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^8$;
 9) $(1 + \sqrt{-1})^6$; 10) $(2 - 3i)^5$; 11) $(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})^{12}$;

- 12) $(x^2 + 1)^6$; 13) $(a^2 - b^2)^4$; 14) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$;
 15) $\left(\frac{3a}{2b} - \frac{2b}{3a}\right)^4$; 16) $(x^3 - 1)^8$; 17) $(a + b)^6 + (a - b)^6$;
 18) $(x + 1)^5 - (x - 1)^5$;
 19) $x^4 + (x + 1)^4 + (x + 2)^4 + (x + 3)^4$;
 20) $(a + ib)^6 + (a - ib)^6$; 21) $(x - iy)^5 - (x + iy)^5$.

Wie heisst der Koeffizient des dritten Gliedes der Entwicklung von:

- 22) $(a - b)^6$; 23) $(a + x)^{12}$; 24) $(a + b)^{100}$; 25) $(ab - cd)^6$;
 26) $\left(2v - \frac{1}{2}w\right)^9$; 27) $(1 + 1)^n$; 28) $\left(2a - \frac{1}{2}b\right)^n$?

Berechne mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

- 29) $\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^4$; 30) $\left(\frac{1}{4}\sqrt{5} - 1\right)^6$; 31) $\left(1 + \sqrt{2}\right)^{12}$;
 32) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^8$; 33) $\left(1 - \frac{1}{100}\right)^4$ auf drei Stellen;
 34) $\left(1 + \frac{3}{100}\right)^8$ auf zwei Stellen; 35) $(0,98)^{10}$ auf fünf Stellen.

Entwickele mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

- 36) $(a + b + c)^3$; 37) $(a + b - c)^4$; 38) $(x - 2y + 1)^5$;
 39) $(a + b\sqrt{2} + c)^6$; 40) $(a^3 + a^2 + a - 1)^7$.

Berechne mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

- 41) $\left(1 + \sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^6$; 42) $\left(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^9$.

§ 31. Das Moivre'sche Theorem.

Berechne Modulus und Argument der komplexen Zahlen:

1) $3 + 4i$; 2) $2 - 2i$; 3) $1 + i\sqrt{2}$; 4) 7 ; 5) $-9i$;

6) $\sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}$; 7) $+\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$;

8) $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

Multipliziere durch Addition der Argumente:

9) $\sqrt{2} - i$ mit $3 + 3i$; 10) $7 - 7i$ mit $1 - i\sqrt{2}$.

Berechne mit Anwendung des Moivre'schen Theorems:

11) $(2 - 2i)^8$; 12) $(\sqrt{6} + 2i\sqrt{3})^5$; 13) $(\sqrt{7} - i\sqrt{11})^7$;

Entwickele mit Anwendung des Moivre'schen Theorems:

14) $\cos 3x$; 15) $\sin 5x$; 16) $\operatorname{tg} 4x$; 17) $\operatorname{cotg} 6x$.

Löse die binomischen Gleichungen:

18) $x^5 = 1$; 19) $x^4 = -1$; 20) $x^7 = \sqrt{2}$; 21) $x^9 = \sqrt{-1}$;

22) $x^6 = 1 + i$; 23) $x^8 = -4 + 3i$; 24) $x^{12} + 1 = 0$;

25) $x^{12} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$; 26) $x^{10} = 3 - 3i$;

27) $x^{15} = a + ia$; 28) $3x^5 + 7 = 0$; 29) $5x^8 = 7\sqrt{2}$;

30) $ix^7 = \sqrt{2} - i$.

§ 32. Kubische Gleichungen.

A. Kardanische Formel, jede der beiden Kubikwurzeln wird rational.

1) $x^3 + 18x - 19 = 0$; 2) $x^3 - 6x = 9$;

3) $x^3 = -9x + 26 = 0$; 4) $x^3 - 28 = 9x$;

- 5) $x^3 - 30x = 133$; 6) $x^3 - 1 + 9(x+3) = 0$;
 7) $12x = x^3 + 65$; 8) $x^3 - 90x - 341 = 0$;
 9) $x(x+2) = \frac{171}{x-2} - 22$; 10) $\frac{72-5x}{4-x} = \frac{122+5x}{6-x} - x$;
 11) $x^3 - \frac{3}{2}x = \frac{9}{8}$; 12) $108(2x^3 - x) = 35$;
 13) $3x^3 - 2x + 1$;
 14) $\frac{(1-x)(2-x)(5-x) - 49x}{(9-2x)(3+4x)} = -1$;
 15) $\left(3 + \frac{1}{x}\right)^3 = \frac{3}{x}\left(3 + \frac{1}{x}\right)^2 + \frac{2}{x^2}\left(9 + \frac{13}{x}\right)$;
 16) $x^3 = a^3 + 3abx + b^3$;
 17) $x^3 - 2a^3 - 6ab^2 = 3a^2x - 3b^2x$.

B. Kardanische Formel, jede der beiden Kubikwurzeln wird irrational, aber ihre Summe rational.

- 18) $x^3 + 12x = 112$; 19) $\frac{x^3}{4} - 3x = 104$;
 20) $4x^3 + 33x = 37$; 21) $\frac{x^3+1}{x+25} = -3$;
 22) $\frac{x^3}{27} + 5x - 38 = 0$;
 23) $\frac{4x+1}{4x-1} - \frac{2}{4x+1} = \frac{7}{2x(16x^2-1)}$;
 24) $x^3 - 3a^2x + 3bx = 2a(a^2 + 3b)$.

C. Kardanische Formel, jede der beiden Kubikwurzeln, sowie auch ihre Summe wird irrational.

- 25) $x^3 + 10x = 12$; 26) $4x(x^2 + 1) = 7$;
 27) $2x = \sqrt{9 + \frac{13}{x}}$.

D. Drei reelle Wurzeln.

28) $x^3 - 7x + 6 = 0$; 29) $x^3 - 52x + 96 = 0$;

30) $4x^3 = 21x + 10$; 31) $\frac{9x^3}{2} + 1 = \frac{7x}{2}$;

32) $\sqrt[3]{x-2} = \frac{x}{3}$; 33) $8x = \sqrt[3]{24x-2}$;

34) $\frac{10}{2x+3} = \frac{13-2x}{\frac{7}{2x} + 2x}$; 35) $2x = \sqrt[3]{6x-2}$;

E. Die Gleichung ist erst zu reduzieren.

Kardanische Lösung.

36) $x^3 - 6x^2 + 24x = 32$; 37) $x^3 = 4(x^2 - 2x + 2)$;

38) $6(x^3 - 2) = 1 + 27x^2 - 38x$; 39) $x^2 = \frac{50}{x-3}$;

40) $4x^2(2x+1) = 60(x+3) + 2$.

F. Die Gleichung ist erst zu reduzieren.

Drei reelle Wurzeln.

41) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$; 42) $x^3 - 4^2 - 20x + 48 = 0$;

43) $60(x-2) = 3x^2 + x^3 - 20$;

44) $\frac{15}{x} = \sqrt{19-2x}$; 45) $\frac{1-11x}{x-1} = 36x^2$.

G. Gleichungen, die auf kubische Gleichungen führen.

46) $\sqrt[3]{2(2x^2+5x+1)} = 2x+1$; 47) $\sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{2x+19} = 5$;

48) $\sqrt[3]{\frac{x}{5} + 3} + \sqrt[3]{\frac{x}{5} - 4} = \sqrt[3]{x+2}$;

49) $\sqrt[3]{2x+4} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{5(x-2)+1}$;

50) $x^6 + 48x^2 = 4864$;

51) $8x^6 - 16x^5 + 3x^3 - 16x + 8 = 0$;

$$52) x^7 = 1; \quad 53) x^9 = 1; \quad 54) \sqrt[3]{2x^3} = 4 \cdot 2^{3x};$$

$$55) \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^3 + y^3 = 28 \end{cases}; \quad 56) \begin{cases} x + y = 3 \\ x^4 - y^4 = 15 \end{cases};$$

$$57) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36 \end{cases}; \quad 58) \begin{cases} x + y + z = 7 \\ xy + xz + yz = 14 \\ xyz = 8 \end{cases};$$

$$59) 25^x (2x - 1)(2x + 1) = 15625.$$

H. Eingekleidet.

60) Welche Zahl übertrifft ihren Kubus um $\frac{10}{27}$?

61) Bei wieviel Punkten im Raume giebt es im ganzen 286 Verbindungsebenen je dreier?

62) Wie lang ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Höhe 60 Zentimeter ist, und dessen eine Kathete 13 Zentimeter kürzer ist als die Hypotenuse?

63) Wie lang sind die Kanten einer Kiste, deren Volumen 32 Kubikzentimeter ist, deren Gesamtoberfläche 88 Quadratzentimeter ist, und deren räumliche Diagonale 9 Zentimeter ist?

64) Wie tief sinkt eine Kugel vom spezifischen Gewicht $\frac{3}{4}$ in Wasser ein?

Ausgewählte*) Resultate.

§ 16.

A.

1) 2; 2) 1; 3) 2; 4) 6; 5) 1; 6) 10; 7) 3; 8) 1.

B.

9) 8; 10) 11; 11) 90; 12) 14; 13) 20; 14) 33; 15) 7;
16) 6; 17) 13; 18) 9.

C.

19) 12; 20) 15; 21) 20; 22) 24; 23) 8; 24) 1; 25) 24;
26) 6; 27) 4; 28) 60; 29) 20; 30) 6; 31) 3; 32) 1;
33) 3; 34) 21; 35) 32; 36) 7; 37) 4; 38) 7.

D.

39) 1; 40) 6; 41) 6; 42) 8; 43) 2; 44) 1; 45) 4; 46) 2;
47) 3; 48) $\frac{2}{5}$; 49) 1; 50) $-\frac{1}{3}$; 51) $-\frac{1}{4}$; 52) $\frac{1}{6}$; 53) 2; 54) 6.

E.

55) 5; 56) 8; 57) 2; 58) $-\frac{2}{3}$; 59) $-\frac{4}{49}$; 60) 6; 61) $\frac{2}{3}$;
62) 3; 63) 6; 64) $\frac{1}{4}$; 65) 13; 66) $\frac{5}{3}$; 67) $\frac{25}{3}$; 68) $\frac{1}{4}$; 69) 8;
70) $-\frac{1}{3}$; 71) 1; 72) 1.

*) Nur aus den fünf umfangreichsten Paragraphen, denen über Gleichungen, sind hier die Resultate mitgeteilt, und auch nur dann, wenn die Kenntnis des Resultats dem Lernenden die Denk-Arbeit nicht abnimmt.

L.

127) 9; 128) 3; 129) 2; 130) 2; 131) 9; 132) $18\frac{2}{3}$; 133) 30;
 135) 75 kg.; 136) 70 Minuten; 137) 25 Pf.; 138) vor
 10 Jahren; 139) 11; 140) um 5; 141) 13 und 7.

142) 30 Meter; 143) 7 Mark; 144) 9 Mark;
 145) 20 Geldstücke.

146) 30 Stimmen; 147) 400 Schüler; 148) 2 Mark
 10 Pf.; 149) 40 Mark.

150) $9\frac{1}{5}$ Jahre; 151) 200 Mark; 152) Im Jahre 1931;
 153) 5000 Mark; 154) 13 Mark; 155) 240, 280 und 320
 Mark; 156) 60° , 80° , 100° , 120° ; 157) 20 Primaner;
 158) 27 Liter; 159) 50 Liter; 160) 25 kg; 161) 1 Mark
 30 Pf. das Liter; 162) 3 kg und 5 kg; 163) $\frac{1}{2}$.

164) 5 km; 165) nach 2 St. 20 Min.; 166) 91 Meter;
 167) um 10 Uhr und 20 km von A; 168) 5200 Meter;
 169) nach 100 Sekunden; 170) 20 km; 171) 45 km pro
 Stunde; 172) 12 km.

173) 13 cm; 174) 12 Fuss; 175) 132 und 228 Grad;
 176) 700 Mann; 177) 12 m; 178) 48 cm; 179) $5\frac{5}{11}$ Min.;

180) $16\frac{4}{11}$ Min. nach 6 Uhr.

181) in $1\frac{1}{2}$ Stunden; 182) 15 kg; 183) 48 cm; 184) mit
 300 Meter pro Sekunde.

185) 162; 186) 428 571; 187) 170.

§ 17.

A.

- 1) $x = 13, y = 6$; 2) $x = 23, y = 3$; 3) $x = 20, y = 7$;
 4) $x = 1, y = 7$; 5) $x = 1, y = 5$; 6) $x = 4, y = 4$;
 7) $x = 5, y = 7$; 8) $x = 3, y = 2$; 9) $x = 1, y = 2$;
 10) $x = 5, y = 4$; 11) $x = 3, y = 2$; 12) $x = 1, y = 5$;
 13) $x = 2, y = 1$; 14) $x = 3, y = 4$; 15) $x = 2, y = 5$;
 16) $x = 13, y = 6$; 17) $x = 18, y = 2$; 18) $x = 6, y = 8$;
 19) $x = 1, y = 1$; 20) $x = 3, y = 2$; 21) $x = -1, y = 5$.

B.

- 22) $x = \frac{1}{2}, y = 1$; 23) $x = \frac{122}{51}, y = \frac{580}{17}$; 24) $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}$;
 25) $x = \frac{32}{63}, y = \frac{3}{7}$; 26) $x = 6, y = \frac{3}{2}$; 27) $x = 1, y = 0$;
 28) $x = 3, y = -\frac{1}{2}$; 29) $x = -\frac{28}{5}, y = \frac{44}{5}$;
 30) $x = \frac{18}{83}, y = \frac{121}{5}$; 31) $x = \frac{1}{3}, y = 6$; 32) $x = \frac{29}{14}, y = \frac{283}{84}$;
 33) $x = \frac{205}{28}, y = \frac{55}{7}$.

D.

- 44) $x = 2, y = 3$; 45) $x = 20, y = 0$; 46) $x = 6, y = 5$;
 47) $x = 14, y = 4$; 48) $x = 7, y = 3$; 49) $x = 3, y = 5$;
 50) $x = 2, y = 7$; 51) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{4}$; 52) $x = -2, y = -8$;
 53) $x = 9, y = 11$; 54) $x = 5, y = 1$.

F.

- 61) $x = 2, y = 3, z = 4$; 62) $x = 5, y = 4, z = 1$;
 63) $x = 7, y = 6, z = 6$; 64) $x = \frac{1}{3}, y = \frac{5}{6}, z = 4$;

- 65) $x = 3, y = 4, z = 5$; 66) $x = 3, y = 4, z = \frac{1}{3}$;
 67) $x = 2, y = 17, z = 0$; 68) $x = 3, y = \frac{1}{5}, z = \frac{4}{3}$;
 69) $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = 5\frac{1}{4}$; 70) $x = \frac{1}{2}, y = 2, z = 3$;
 71) $x = 1, y = -1, z = -1$.
 77) $x = 12, y = 16, z = 20$; 78) $x = 2, y = 3, z = 4, u = 5$;
 79) $x = 5, y = 3, z = 1, u = -1$;
 80) $x = 6, y = 12, z = 0, u = 0$;
 81) $x = 4, y = 3, z = 2, u = 1, v = 0, w = -1$.

G.

- 82) 11 und 6; 83) 32 und 12; 84) 4 und 2; 85) $\frac{13}{48}$;
 86) 9 und 333 (Meter pro Sekunde);
 87) 30 Mark und 40 Mark; 88) 45 für, 15 gegen;
 89) 34 englische, 20 französische Goldstücke; 90) 5 zu 7;
 91) 648; 92) 73; 93) 135; 94) 10000 Mark und 12000 Mark;
 95) 7200 Mark und 9000 Mark;
 96) Weisswein 1 Mark 20 Pf., Rotwein 1 Mark 30 Pf.;
 97) aus $9\frac{1}{2}$ g Gold und $10\frac{1}{2}$ g Silber;
 98) 110 Meter und 10 Meter pro Sekunde;
 99) Maschine: $17\frac{1}{2}$ km und Stromwasser: $2\frac{1}{2}$ km;
 100) Der eine geht in 1 Stunde 5 km, der andere 4 km,
 die Städte haben eine Entfernung von 36 km;
 101) 13 cm und 14 cm; 102) 24 cm und 7 cm;
 103) 6 und 4; 104) 6000 Mann; 105) 1 und 5 und 7;
 106) 51 und 31 und 21 Jahre alt;
 107) 4 Mark, 7 Mark, 13 Mark; 108) 48 Mark, 60 Mark,
 und 72 Mark; 109) 15 Mark, 12 Mark, 8 Mark hatten
 sie bei sich, die Zeche betrug 18 Mark; 110) In 30 Mi-

nuten, 20 Minuten, 5 Minuten; 111) 2, 3, 4, 5 sind die 4 Zahlen.

§ 21.

[Von den zwei oder mehr Werten der Unbekannten ist hier meist nur einer angegeben.]

A.

- 1) 25; 2) 5; 3) $\frac{4}{5}$; 4) 6; 5) $\frac{4}{3}$; 6) 7; 7) $\frac{7}{30}$; 8) $\frac{1}{9}$; 9) 14;
 10) 4; 11) 1; 12) 5; 13) 4; 14) $\frac{4}{3}$; 15) 4; 16) 3,2;
 17) $640\sqrt{2}$; 18) $192\sqrt{2}$; 23) $\sqrt{3}$; 24) $i\sqrt{3}$; 25) i ;
 26) $\sqrt{5}$; 27) $4i$; 28) $x=1$; 29) $\sqrt{5}$; 30) $\frac{1}{5}\sqrt{65}$; 31) $\sqrt{2}$.

B.

- 32) 7; 33) 2; 34) 8; 35) 7; 36) 3; 37) 6; 38) 8; 39) 11;
 40) -2; 41) 4; 42) 10; 43) 6; 44) -3; 45) 6; 46) 4;
 47) 15; 48) 9; 49) 31; 50) 51; 51) -7;
 52) 20, 264; -24, 220.
 53) 6; 54) 7; 55) -1; 56) 10; 57) 2; 58) 1; 59) 6;
 60) 1; 61) 4; 62) 3; 63) 2; 64) 4.

C.

- 65) 3; 66) 4; 67) $\frac{1}{2}$; 68) $\frac{1}{4}$; 69) $\frac{1}{3}$; 70) 1; 71) 4; 72) 3;
 73) 3; 74) 1; 75) $\frac{1}{3}$; 76) $x=2$.

D.

- 77) $-2+\sqrt{5}$; 78) $-11+\sqrt{11}$; 79) $-1+2\sqrt{17}$;
 80) $-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{7}$; 81) $16+4\sqrt{6}$; 82) $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}$;
 83) $1+\sqrt{3}$; 84) $2+\frac{1}{2}\sqrt{15}$; 85) $1+\sqrt{2}$; 86) $4-\sqrt{5}$.

E.

- 87) $-3 + i$; 88) $i\sqrt{5}$; 89) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$;
 90) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\sqrt{15}$; 91) $-\frac{5}{4} + \frac{1}{4}i\sqrt{7}$;
 92) $-\frac{1}{12} + \frac{1}{12}i\sqrt{19}$; 93) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$; 94) $1 + 2i\sqrt{3}$;
 95) $74 + 2i$; 96) $8 + \frac{1}{2}i\sqrt{82}$; 97) $5 + i\sqrt{23}$;
 98) $\frac{1}{10}i\sqrt{30}$.

K.

- 182) 3; 183) 9; 184) 1; 185) 2; 186) 2; 187) 3;
 188) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; 189) $\frac{5}{2}$; 190) 2.

L.

- 192) $\frac{1}{9}$; 193) $\frac{3}{4}$; 194) $\frac{5}{4}$; 195) $-\frac{9}{5}$; 196) 22;
 197) $\frac{11}{3}$; 198) 1; 199) 1; 200) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{15}$;
 201) 1.

M.

- 202) 3; 203) 4; 204) 1; 205) 1; 206) 1; 207) 1;
 208) $\frac{2}{3}$; 209) 2; 210) $\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) + \frac{i}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$;
 211) $\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1) + \frac{i}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

N.

- 212) 16; 213) $\frac{25}{196}$; 214) 4; 215) 5; 216) 1; 217) 4;
 218) 5; 219) 5; 220) 3; 221) 16; 222) 2; 223) 1.

O.

- 225) 9; 226) 5; 227) 10; 228) $\frac{3}{2}$; 229) 5;
 230) 2; 231) 25; 232) 23; 233) 9; 234) $\frac{1}{6}$; 235) 3;
 236) 24; 237) 5; 238) 50; 239) $-\frac{7}{6}$.

P.

- 241) 1; 242) -1 ; 243) 1; 244) 1;
 245) $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) + \frac{1}{4}i\sqrt{10+2\sqrt{5}}$;
 246) $\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) + \frac{1}{4}i\sqrt{10-2\sqrt{5}}$;
 247) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$; 248) $\frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$;
 249) $\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) - \frac{1}{4}i\sqrt{10-2\sqrt{5}}$;
 250) $\frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Q.

- 251) 20; 252) 1; 253) i ; 254) 4 und 5;
 255) $\sqrt{2}+1$ und $\sqrt{2}-1$; 256) 3; 257) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$;
 258) $\frac{9}{4}$; 259) 4.
 260) 2 Zentimeter; 261) 12 Meter oder 24 Meter;
 262) 25 Zentimeter; 263) $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ Meter oder 0,618
 Meter; 264) 82 Zentimeter; 265) $6\frac{1}{2}$ Zentimeter;
 266) 2 Zentimeter; 267) 1 Zentimeter; 268) 7 Zentimeter;
 269) $3 + 2\sqrt{2}$ Zentimeter oder 5,828 Zentimeter;
 270) 25 Punkte.

- 271) 10 kg; 272) Nach $\frac{24}{49}$ Sekunden und nach 4 Sekunden;
 273) 64 Zentimeter; 274) 160 Meter.
 275) 18 Herren, 20 Damen; 276) 5 Herren; 277) 20 Tage;
 278) 30 Einwohner; 279) 12 Primaner.
 280) 100 Meter; 281) 13 km vom einen, 11 km vom
 andern Ort; 282) $12\frac{1}{2}$ Min. bzw. $16\frac{2}{3}$ Min.

 § 22.

[Von den zwei oder mehr Wertgruppen der Unbekannten ist hier meist nur eine angegeben.]

A.

- 1) $x = 4, y = 9$; 2) $x = 7, y = 3$; 3) $x = 8, y = 5$;
 4) $x = 13, y = 8$; 5) $x = 1, y = 6$; 6) $x = 3, y = 4$;
 7) $x = 10, y = 1$; 8) $x = 1, y = 1$; 9) $x = 4, y = 10$;
 10) $x = 1, y = 1$; 11) $x = 4, y = 6$; 12) $x = 3, y = 1$;
 13) $x = 1, y = 1$.

B.

- 14) $x = 1, y = 2$; 15) $x = 5, y = 4$; 16) $x = 2, y = 7$;
 17) $x = 2, y = 11$; 18) $x = 6, y = 2$; 19) $x = 9, y = 5$;
 20) $x = 5, y = 7$; 21) $x = 2, y = 3$; 22) $x = 2, y = 6$;
 23) $x = 1, y = 1$.

C.

- 24) $x = 1, y = 2$; 25) $x = 3, y = 1$; 26) $x = 1, y = 4$;
 27) $x = 2, y = 1$; 28) $x = 2, y = 2$; 29) $x = 1, y = 1$;
 30) $x = 5, y = 1$; 31) $x = 3, y = 2$.

D.

- 32) $x = 7, y = 1$; 33) $x = 3, y = 2$; 34) $x = 2, y = 3$;
 35) $x = 5, y = 4$; 36) $x = 1, y = 3$; 37) $x = 1, y = 5$;
 38) $x = 1, y = 2$; 39) $x = 2, y = 3$; 40) $x = 1, y = 2$;

- 41) $x = 1, y = 3$; 42) $x = 3, y = 2$; 43) $x = 3, y = 1$;
 44) $x = 1 + 2i\sqrt{2}, y = 1 - 2i\sqrt{2}$; 45) $x = 1, y = 2$;
 46) $x = 2, y = 2$; 47) $x = 3, y = 2$; 48) $x = 2, y = 1$;
 49) $x = 4, y = 3$; 50) $x = 3, y = 4$.

F.

- 58) $x = 4, y = 9$; 59) $x = 1, y = 3$; 60) $x = 5, y = 9$;
 61) $x = 1, y = 2$; 62) $x = 1, y = 2$; 63) $x = 4, y = 1$.

H.

- 76) $x = 2, y = 1, z = 1$; 77) $x = 1, y = 2, z = 3$;
 78) $x = 2, y = 3, z = 4$; 79) $x = 3, y = 4, z = 5$;
 80) $x = 1, y = 3, z = 5$; 81) $x = 3, y = 5, z = 8$;
 82) $x = 4, y = 6, z = 9$; 83) $x = 4, y = 3, z = 4$;
 84) $x = 1, y = 2, z = 4$; 85) $x = 3, y = 8, z = 4, u = 6$;
 86) $x = 1, y = 2, z = 3, u = 4$;
 87) $x = 1, y = 2, z = 3, u = 5$;
 88) $x = 1, y = 2, z = 3, u = 5$;
 89) $x = 1, y = 1, z = 2, u = 2, v = 3$ oder $x = 2, y = 1, z = 1, u = 3, v = 2$.

I.

- 90) 25 und 40; 91) 11 und 4; 92) $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ sowie $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$;
 93) 169 und 144; 94) 2; 95) 3 : 4 = 12 : 16; 96) 324;
 97) 72 oder 108; 98) $\frac{4}{9}$. 99) 9 m, 12 m und 15 m lang;
 100) 3 cm und 2 cm; 101) 6 cm und 8 cm;
 102) 5 Ecken und 7 Ecken; 103) 6 cm, 2 cm, 3 cm;
 104) 6 Sekunden, $16\frac{1}{2}$ Meter; 105) in 10 Minuten und in 12 Minuten; 106) 12 Meter und 5 Meter.
 107) 9 Pferde, jedes zu 200 Mark; 108) 50 Flaschen, die Flasche zu 1 Mark 20 Pf; 109) 105 Volt Spannung;

- 110) 24 Ampère Stromstärke und 50 Ohm Widerstand;
 111) I. Klasse: 10 Pf., II. Klasse: $7\frac{1}{2}$ Pf., III. Klasse:
 5 Pf.

§ 32.

A.

Die reelle Wurzel ist gleich:

- 1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) 4; 5) 7; 6) -2 ; 7) -5 ;
 8) 11; 9) 5; 10) 2; 11) $1\frac{1}{2}$; 12) $\frac{5}{6}$; 13) 1; 14) 1;
 15) $1\frac{1}{8}$; 16) $a + b$; 17) $2a$.

B.

Die reelle Wurzel ist gleich:

- 18) 4; 19) 8; 20) 1; 21) -4 ; 22) 6; 23) $\frac{1}{2}$; 24) $2a$.

C.

Die reelle Wurzel ist gleich:

- 25) 1,076; 26) 0,934; 27) 1,974.

D.

Die kleinste Wurzel ist gleich:

- 28) -3 ; 29) -8 ; 30) -2 ; 31) -1 ; 32) -6 ;
 33) $-\frac{1}{4}$; 34) $-3\frac{1}{2}$; 35) -1 .

E.

Die reelle Wurzel ist gleich:

- 36) 2; 37) 2; 38) $\frac{1}{2}$; 39) 5; 40) $3\frac{1}{2}$.

F.

Die kleinste Wurzel ist gleich:

- 41) 1; 42) -4 ; 43) -10 ; 44) 5; 45) $\frac{1}{6}$.

G.

Die eine Lösung ist:

- 46) $\frac{1}{2}$; 47) 4; 48) 25; 49) 2; 50) 4; 51) $\frac{1}{2}$; 52) 1; 53) 1;

- 54) 2; 55) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$; 56) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$; 57) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

- 58) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$; 59) 1.

H.

- 60) Die Zahl $\frac{2}{3}$; 61) Bei 13 Punkten; 62) 169 Zentimeter lang; 63) 1 und 1,4 und 8 Zentimeter; 64) Die Höhe des im Wasser befindlichen Segments ist 1,3473 mal so gross wie der Kugelradius.
-

Arithmetik und Algebra

von

Prof. Dr. H. Schubert.

(Sammlung Göschen No. 47. 172 S.)

Preis in eleg. Leinwandband 80 Pfennig.

Inhaltsübersicht:

I. Uebergang vom Rechnen zur Arithmetik. —
II. Rechnungsarten erster Stufe. — III. Rechnungsarten
zweiter Stufe. — IV. Anwendungen der Rechnungsarten
erster und zweiter Stufe. — V. Quadratisches. — VI.
Rechnungsarten dritter Stufe. — VII. Anhang.

Beispielsammlung

zur

Arithmetik und Algebra

von

Prof. Dr. H. Schubert.

(Sammlung Göschen No. 48.)

Preis in eleg. Leinwandband 80 Pfennig.

Inhaltsübersicht:

I. Uebergang vom Rechnen zur Arithmetik. —
II. Rechnungsarten erster Stufe. — III. Rechnungsarten
zweiter Stufe. — IV. Anwendungen der Rechnungsarten
erster und zweiter Stufe. — V. Quadratisches. — VI.
Rechnungsarten dritter Stufe. — VII. Anhang. — Aus-
gewählte Resultate.

Ebene Geometrie

von

G. Mahler

(Sammlung Göschen No. 41. 160 S. mit 115 zweifarbigen Figuren.)

Preis in eleg. Leinenband 80 Pfennig.

Inhaltsübersicht:

I. Symmetrie und Kongruenz. Der Punkt und die Gerade. — Der Kreis. Der geometrische Ort. — Der Winkel. — Von den Figuren im allgemeinen. — Zentrische Symmetrie. — Axiale Symmetrie. — Kongruenz. — Das Parallelogramm und das Trapez. — Der Kreis. — Regelmässige Vielecke. — Die Gleichheit der Inhalte. A. Vergleichung der Inhalte. — B. Verwandlung der Figuren. — C. Teilung der Figuren. — **II. Aehnlichkeit.** Proportionale Strecken, erzeugt durch Parallellinien. — Proportionale Strecken, erzeugt durch Wechsellinien. — Aehnlichkeit der Figuren. — Die Ausmessung geradliniger Figuren. — Die Ausmessung des Kreises. — **III. Die geometrische Aufgabe.** Wesen und Behandlung der Aufgabe. — **Anhang.** Die Strecke mit Rücksicht auf ihre Richtung.

- Aeschylus' Tragödien.** Deutsche Nachdichtung von Oswald Marbach.
(XXXI, 482 S.) 8°. 5 M. Geb. 6 M. 10 Pf.
- Bernays, Michael, Schriften zur Kritik und Literaturgeschichte.**
I. Band: Zur neueren Literaturgeschichte. (X, 454 S.) Gr. 8°. 9 M.
In seinem Liebhb. 10 M. 20 Pf.
- Beyer, Prof. Dr. C., Deutsche Poetik.** Theoretisch-prakt. Handbuch
der deutschen Dichtkunst. Nach den Anforderungen der Gegenwart. 3 Bde.
2. Aufl. (V, XXII, 765 S., XIV, 576 S., XII, 276 S.) Gr. 8°. 15 M.
Geb. 19 M.
- **Die Technik der Dichtkunst.** Anleitung zu Vers- und Strophenbau
und zur Uebersetzungskunst. 2. Aufl. (XIII, 276 S.) Gr. 8°. 3 M. Geb.
4 M. 50 Pf.
- Borinski, Karl, Grundzüge des Systems der artikulierten
Phonetik.** Zur Revision der Principien der Sprachwissenschaft.
(XI, 66 S.) Gr. 8°. 1 M. 50 Pf.
- Cauer, Privatdozent Friedr., Hat Aristoteles die Schrift
vom Staate der Athener geschrieben? Ihr Ursprung und ihr
Wert f. d. ältere athen. Gesch.** (78 S.) 8°. 1 M.
- Ditfurth, Freiherr Fr. W. v., Zweihundfünfzig ungedruckte
Balladen des 16., 17. und 18. Jahrhunderts.** Aus fliegenden Blättern,
handschriftlichen Quellen und mündlicher Ueberlieferung gesammelt und
herausgegeben. (XII, 196 S.) 8°. 2 M. 80 Pf.
- **Einhundertundzehn Volks- und Gesellschaftslieder des 16.,
17. und 18. Jahrhunderts mit und ohne Singweisen.** Nach fliegenden
Blättern, handschriftlichen Quellen und dem Volksmunde gesammelt und
herausgegeben (XIV, 383 S.) 8°. 5 M. 60 Pf.
- **Einhundert unedirierte Lieder des 16. und 17. Jahrhunderts
mit ihren zweistimmigen Singweisen.** (X, 140 S.) 8°. 2 M. 80 Pf.
- Fleischlen, Casar, Graphische Litteraturtafel.** Die deutsche Litte:atur
und der Einfluß fremder Litteraturen auf ihren Verlauf vom Beginn einer
schriftlichen Ueberlieferung an bis heute in graphischer Darstellung. 3.
Tausend. Farbige Tafel. Gr. Fol. Nebst Text. (8 Sp.) 4°. Kart. 2 M.
- Freiligrath, Gesammelte Dichtungen.** 6 Bde. 5. Aufl. 8°. In
Leinw. geb. 13 M.
- **Nachgelassenes.** Maseppa. Der Eggerstein. Geb. 2 M.
- Fürst, Rudolf, August Gottlieb Meißner.** Eine Darstellung seines
Lebens und seiner Schriften mit Quellenuntersuchungen. Mit dem Bild
Meißners in Lith:druck. Gr. 8°. (XVI, 356 S.) 6 M.
- Grillparzers Ansichten über Litteratur, Bühne und Leben.**
Aus Unterredungen mit Ado:lf Foglar. 2. verb. und verm. Aufl.
Gr. 8°. (VI, 71 S.) 1 M. 80 Pf., geb. 2 M. 80 Pf.
- Houwalds Werke.** 5 Bde. Taschenausg. 4 M. 20 Pf. Eleg. geb. 6 M. 50 Pf.
- Jahresberichte f. neuere deutsche Litteraturgeschichte.**
Unter ständiger Mitwirkung erster Fachgelehrter und mit beson-
derer Unterstützung von Erich Schmidt herausgegeben von Julius
Ellas und Max Osborn. Lex. 8°.
- I. Bd. [Jahr 1890] (XI, 136 u. 196 S.) 10 M., geb. 12 M.
II. Bd. [Jahr 1891] (IX, 196 u. 275 S.) 12 M., geb. 14 M.
III. Bd. [Jahr 1892] (Ber. I, 1—11; II, 1—8; III, 1—5; IV, 1—12).
23 M. 80 Pf., geb. 25 M. 80 Pf.
IV. Bd. [Jahr 1893] (Ber. I, 1—13; II, 1—7; III, 1—5; IV, 1a—11).
26 M. 80 Pf., geb. 28 M. 80 Pf.
- **Einbanddecken zu jedem Band 2 M.**
- Offhand's theatralische Werke.** Mit Biographie. 10 Bde. Taschenausg.
Eleg. geb. 10 M.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

- Klopstocks Werke.** Mit Biographie und erläuternden Anmerkungen. Herausgeg. v. A. S. Bach, Kirchenrat. 6 Bde. Kl. 8°. 8 M. Eleg. geb. 11 M.
- Klopstocks Oden. Kritisch-historische Ausgabe.** Mit Unterstützung des Klopstock-Vereins und in Verbindung mit Jaro Pawel herausgegeben von Franz Munder. Gr. 8°. (XVIII, 238; VIII, 184 S.) 12 M., geb. in Halbleberdb. 14 M.
- Klopstocks Oden** (mit den geistlichen Liedern und Epigrammen). Mit erläuternden Anmerkungen von A. S. Bach. 2 Teile in einem Band. 3 M. 30 Pf.
- Klopstocks Oden.** Taschenausgabe. 1 M. 40 Pf.
- **Messias.** Kl. 8°. 2 Teile in einem Bande. 2 M. 60 Pf.
- Klopstock, Geschichte seines Lebens und seiner Schriften** von Franz Munder. Mit Klopstocks Bildnis in Lichtdruck. Neue Ausgabe in 1 Band. 1893. Gr. 8°. (X, 566 S.) 12 M., geb. in Halbleberdb. 14 M.
- Koch, Max, Geschichte der deutschen Litteratur. Geschenkausgabe.** 8°. (278 S.) Geb. in Leinw. 3 M.

Lessings Werke.

Göschen'sche Original-Ausgaben.

- Lessings sämtliche Schriften.** Historisch-kritische Ausgabe von Sachmann-Munder. 8. Auflage vollständig in 15 Bänden gr. 8° geb. je 4 M. 50 Pf., einf. Halbleber 6 M., fein Halbleber 7 M. Bis 1896 erschienen Band I—XII.
- Bibliotheksausgabe** gr. 8°. 12 Halbleberbände 38 M.
- " " 6 Halbleberbände 26 M.
- " " 12 bill. Liebhaberbde. 24 M.
- Rabinettausgabe** 8°. 6 Halbleberbände 15 M.
- " " 6 Liebhaberbände 12 M.
- " " 6 feine Leinwandbände 10 M.
- Billige 8°-Ausgabe** 6 Bände in feinem Halbleberband 7 M. 60 Pf.
- " in eigenartig vornehmem Liebhaberband 6 M. 60 Pf.
- Lessings ausgewählte Werke** 2 Bände in Prachtband 2 M. 80 Pf.
- Lessings Meisterdramen,** vornehmer Einband 3 M.
- Lessings Hamburg. Dramaturgie.** 8°. 1 M. 20 Pf.
- Liederdichter, Deutsche, des 12.—14. Jahrhunderts.** Eine Auswahl v. K. Bartsch. 8. Aufl., besorgt v. W. Golther. Gr. 8°. (LXXXVI, 407 S.) 5 M., in altd deutschem Bibliotheksband 6 M.

Deutsche Litteraturdenkmale.

des 18. u. 19. Jahrhunderts, herausg. v. August Sauer.

Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Nummern:

1. Klinger, F. M., Otto, Trauersp. Her. v. B. Seuffert. VIII, 108 S. 1881. 90 Pf.
2. Wagner, H. L., Voltaire am Abend seiner Apotheose. Her. v. B. Seuffert. XI, 19 S. 1881. 40 Pf.
3. Müller, Maler, Fausts Leben. Her. v. B. Seuffert. XXVI, 116 S. 1881. 1 M. 10 Pf.
4. Gleim, J. W. L., Preuss. Kriegerlieder v. e. Grenadier. Her. v. A. Sauer. XXXVII, 44 S. 1882. 70 Pf.
5. Goethe, Faust, ein Fragm. Her. v. B. Seuffert. XV, 89 S. 1882. 80 Pf.
6. Wieland, C. M., Hermann. Hr. v. F. Muncker. XXX, 116 S. 1882. 1 M. 20 Pf.
7. 8. Frankfurt. Gelehrte Anzeigen vom Jahre 1772. (Eingel. v. W. H. Scherer, her. v. B. Seuffert.) Erste Hälfte. S. 1—352. 1882. 2 M. 80 Pf. Zweite Hälfte n. Einleitung u. Register. S. 353—700 u. CXXIX S. 1883. 3 M. 80 Pf., zus. 6 M. 60 Pf.